目　　录

预备知识

本书假定读者已知集论、线性空间、点集拓扑等概念. 但为了便于读者查找，又由于使用的名词和符号可能有所不同，在此把以后要用到的有关内容作一概述.

一、集和序集

集由元组成。通常用大写字母 $A, B, \cdots$ 表示集；用小写字母 $a, b, c, \cdots, x, y, z, u, v, \cdots$ 表示集中的元。用 $a\in A$ 表示“a 是 A 的元”；$a\bar{\in}A$ 表示“a 不是 A 的元”。设 A、B 是两个集合，用 $A\subset B$ 表示“A 是 B 的子集”；用 $\{a\}$ 表示包含 a 的单点集；$\varnothing$ 表示空集。

设 X 是某个集，我们常常根据 X 中的元的某些性质来确定 X 的子集。例如实数集 R，由“大于 1”这一性质就可以确定 R 的一个子集，也就是说，由实数中“大于 1”的所有的数组成 R 的一个子集，此子集用下列符号表示之：

$$\{x\,|\,x\in R,\ x>1\}.$$

集 X 中的元的性质如果是由一个命题 P 给定的，用 $P(x)$ 表示元 x 具有命题 P 所述的性质，那末 X 中所有满足命题 P 的元的全体所组成的子集可用下列符号表示之：

$$\{x\,|\,x\in X,\ P(x)\}.$$

如果 P、Q 表示两个命题，我们用 $P\Longrightarrow Q$ 表示：由命题 P 可以推得命题 Q，即满足命题 P 的元必定满足命题 Q。$P\Longleftrightarrow Q$ 表示命题 P 和 Q 是等价的。

本书对常用到的几个集也以常用的固定符号表示之，例如，用 N 表示自然数的全体；K 表示实数或复数域；R 表示实数域；C 表示复数域。

设 X、Y 是两个集合。X 到 Y 的映照 f 用 $f: X\to Y$ 或 $x\mapsto f(x)$ 表示之。X 称为 f 的定义域。X 在 f 映照下的像：$f(X)\equiv\{f(x)\mid x\in X\}$ 称为 f 的值域，其中"$\equiv$"表示它所联结的两边按定义是相同的。如果 A 是 X 的子集，那末把 A 中的每个元 x 映成 $f(x)\in Y$ 的映照称为映照 f 在 X 的子集 A 上的限制，记为 $f|_A$。通常，记 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$。如果 $B\subset Y$，则称 $f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}$ 为 B 在映照 f 下的原像。

集 X 中的元之间的关系 $\leqslant$（或 $\prec$）称为序关系，是指它满足下列三个条件：

(a) $x\leqslant x$（自反性）；

(b) $x\leqslant y,\ y\leqslant z\Longrightarrow x\leqslant z$（传递性）；

(c) $x\leqslant y,\ y\leqslant x\Longrightarrow x=y$（反对称性）。

通常，$y\geqslant x$ 即指 $x\leqslant y$。如果 $\leqslant$ 是序关系，那末 $\geqslant$ 也是序关系，称为原来序关系 $\geqslant$ 的对偶序关系。$y<x$ 表示 $y\leqslant x$ 且 $y\neq x$。一个具有序关系的集称为序集。如果序关系还满足：对于 X 中的每两个元 x、y，下面两个关系至少有一个成立：

$$x\geqslant y,\ y\geqslant x, \tag{1}$$

那末这个序关系称为全序关系，而序集 X 称为全序集。不满足上述性质的序集称为半序集。

如果 X 是序集，A 是 X 的子集，若 $a\in X$ 使

$$x\in A\Longrightarrow x\leqslant a\quad (x\geqslant a),$$

则称 a 为 A 的上界（下界）。

如果 a 是 A 的上界（下界），而且对于 A 的每个上界（下界）b，一定有 $a\leqslant b$（$a\geqslant b$），那末 a 称为 A 的上确界或上端（下确界或下端）。如果上（下）确界存在，它是唯一的。

如果序集 X 的子集 A 包含 A 的一个上界（下界）a，那末称 a 为 A 的最大元（最小元）。这时 a 也是 A 的上端（下端）。如果序集 X 的子集 A 中有一个元 $a\in A$，A 中没有元 b 能满足 $b>a$（$<a$），那末称 a 为 A 的极大（极小）元。最大（最小）元必是极大（极小）元，反之，一般不成立，但在全序情形是对的。

如果序集 X 中每两个元组成的集都有上端和下端，则称 X 为格(或络)，在格中，x、y的上端(下端)表示为 $x\vee y(x\wedge y)$。

如果 X 是序集，对 X 中的任意两元 x、y，必存在一元 $z\in X$，使

$$z\geqslant x,\ z\geqslant y\ \ (z\leqslant x,\ z\leqslant y).$$

则称 X 为按序关系 $\geqslant(\leqslant)$ 的定向集。

本书承认选择公理，下述命题是和选择公理等价的。

Zorn 引理 设 X 是非空序集，如果 X 中的每个全序子集在 X 中都有上端，那末 X 中至少有一个极大元。

设 X 是一个集，$\mathscr{F}$ 是 X 中的子集的集合(称为集族)。如果满足下述条件：

(a) $\mathscr{F}\neq\varnothing$，且 $\varnothing\bar{\in}\mathscr{F}$；

(b) 如果 $F\in\mathscr{F}$，而 $F\subset G\subset X$，那末 $G\in\mathscr{F}$；

(c) 如果 $F\in\mathscr{F}$，$G\in\mathscr{F}$，那末 $F\cap G\in\mathscr{F}$。

则称集族 $\mathscr{F}$ 为 X 中的一个滤子。

二、点集拓扑

定义 1 设 X 是非空集，如果对于 X 中的每一个元 x，规定了 X 的一些子集所组成的集族，以 $\mathscr{V}(x)$ 表示之，如果 $\mathscr{V}(x)$ 满足下面四个条件，则称为点 x 的环境(或邻域)组。

(1) 如子集 $V\in\mathscr{V}(x)$，则 $x\in V$，即每点的环境必包含这一点。

(2) 如果 $V\in\mathscr{V}(x)$，则当 $U\supset V$ 时，$U\in\mathscr{V}(x)$。换句话说，如果 V 是 x 的一个环境，那末包含 V 的集也一定是 x 的环境。

(3) $\mathscr{V}(x)$ 关于有限交是封闭的，即如果 $V_1,\cdots,V_n\in\mathscr{V}(x)$，那末 $V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_n\in\mathscr{V}(x)$。

(4) 设 $V\in\mathscr{V}(x)$，则必存在一个集 $U\in\mathscr{V}(x)$，使得对于 U 中一切 y，有 $V\in\mathscr{V}(y)$。粗略地说，如果 V 是 x 的一个环境，那末它也是"充分接近"于 x 的一切点的环境。

$T=\{\mathscr{V}(x),\ x\in X\}$ 定义了 X 上的一个拓扑。赋有拓扑的集称为拓扑空间，拓扑空间可记为 (X,T)，或简单地记为 X。

例如，设 X 是任一非空集，对 X 中每个 x，规定

$$\mathscr{V}(x)=\{X\},$$

即只有一个集X组成的集族。易知$\mathscr{V}(x)$满足定义中一切条件，而这样定义的拓扑称为平凡拓扑。又如果规定X中每个含x的子集作为x的环境，显然也构成一个拓扑，称为X上的离散拓扑。

定义 2 设X是一拓扑空间，而$\{x_\nu\}$是X中的一个定向点列(即足标集是一个定向序集)，所谓点列x_ν收敛于$x_0(\in X)$，是指对于每个$V\in\mathscr{V}(x)$，必存在足标ν_0，使

$$\nu\geqslant\nu_0\Longrightarrow x_\nu\in V.$$

x_0称为点列x_ν的极限。通常表示为$\lim x_\nu=x_0$，或$x_\nu\xrightarrow{T}x_0$，其中T是X中的拓扑。

设A是X中的点集，所谓$x_0\in X$是A的附着点，是指由A中的点可作出一个半序点列收敛于x_0，A的附着点的全体组成的集称为A的闭包，记为$\overline{A}$或$[A]_X^-$。如果$A=\overline{A}$，则称A为闭集。闭集的余集称为开集。点x是A的内点，是指$A\in\mathscr{V}(x)$，显然A的内点一定属于A。A的内点的全体所组成的集合称为A的开核，记为A^i。容易知道，A为开集的充要条件是A为它自己的每个点的环境，即$A=A^i$。容易验证：

(I) 设$\mathfrak{G}$是拓扑空间X中一切开集所组成的集族，则

(O_1) 空集$\varnothing$和全空间X在$\mathfrak{G}$中；

(O_2) $\mathfrak{G}$中任意个集的并集在$\mathfrak{G}$中；

(O_3) $\mathfrak{G}$中有穷多个集的交集在$\mathfrak{G}$中。

定理 1 设X是一集，$\mathfrak{G}$是X中某些子集所组成的集族，并且满足上述条件(O_1)、(O_2)、(O_3)。如果对每个元$x\in X$，规定$V\in\mathscr{V}(x)$，是指存在$O\in\mathfrak{G}$，使$x\in O\subset V$。则$\mathscr{V}(x)$满足定义1中的(1)～(4)，从而由它可在X上定义一拓扑，使X成为拓扑空间，并且在这拓扑空间中，$\mathfrak{G}$恰是X的一切开集所组成的集族。

证 $\mathscr{V}(x)$满足定义1中的条件(1)、(2)是明显的。由(O_3)可知$\mathscr{V}(x)$也满足(3)。下面只要验证条件(4)。设$V\in\mathscr{V}(x)$，依定义，存在$O\in\mathfrak{G}$，使$x\in O\subset V$。如果$y\in O$，则因$y\in O\subset V$可知$V\in\mathscr{V}(y)$，所以$O\in\mathscr{V}(x)$满足条件(4)的要求。从而由$\mathscr{V}(x)$可

在 X 上给定一个拓扑.

下面证明 $\mathfrak{E}$ 恰好是 X 中的一切开集。设 $O\in\mathfrak{E}$, 依上述规定, 对于每个 $x\in O$, $O\in\mathscr{V}(x)$。所以 O 是开集. 反之, 设 U 是拓扑空间 X 中的开集, 那末对于每个 $x\in U$, $U\in\mathscr{V}(x)$。依上述规定, 存在 $O_x\in\mathfrak{E}$, 使 $x\in O_x\subset U$。因此, 根据 (O_2), 有

$$U=\bigcup_{x\in U}O_x\in\mathfrak{E}.$$

证毕。

设 X 是拓扑空间, 在其上规定了每个点 x 的环境组 $\mathscr{V}(x)$。那末 X 中开集的全体 $\mathfrak{E}$ 满足 $(O_1)\sim(O_3)$。由定理 1, 依据 $\mathfrak{E}$, 又可定义 X 上的一个拓扑, 则这个拓扑和原拓扑必定一致. 这是因为: 由定义 1 中条件(4), 对每个 $V\in\mathscr{V}(x)$, 必存在 x 的开环境 W, 使 $W\subset V$. 这样, 由全体开集就可唯一地确定相应的拓扑. 所以定义拓扑时也可以规定满足 $(O_1)\sim(O_3)$ 的集族作为开集的全体。

定义 3 设 X 是一拓扑空间, $x\in X$. 又设 $\mathscr{U}(x)$ 是点 x 的某些环境所成的环境族。如果对于点 x 的任何环境 V, 必有 $U\in\mathscr{U}(x)$, 使得 $U\subset V$。则称 $\mathscr{U}(x)$ 是拓扑在点 x 的环境基。

例如, 当 (R,ρ) 是一个距离空间, $x\in R$, 取 $\mathscr{U}(x)=\{O(x,r)|r>0\}$, 那末它就是在 x 点的一个环境基。

由于 x 的环境组 $\mathscr{V}(x)$ 可由环境基 $\mathscr{U}(x)$ 唯一地确定, 故拓扑可由环境基 $\mathscr{U}(x)$ 确定。

定理 2 设 X 是一集, 如果对每个点 $x\in X$ 指定了 X 的子集族 $\mathscr{U}(x)$ 满足条件:

(N_1) 对每个 $U\in\mathscr{U}(x)$, 含有点 x;

(N_2) 对任何 U_1、$U_2\in\mathscr{U}(x)$, 必有 $U\in\mathscr{U}(x)$, 使得 $U\subset U_1\cap U_2$;

(N_3) 设 $U\in\mathscr{U}(x)$, 而且 $y\in U$, 则必有 $V\in\mathscr{U}(y)$, 使得 $V\subset U$。那末必有 X 上的唯一拓扑 T, 使得 $\mathscr{U}(x)$ 成为 T 在 x 点的环境基。

设 X、Y 是拓扑空间. 映照 f: $X\to Y$, 如果对于 $y=f(x)$ 的每

个环境 V，$f^{-1}(V)$是 x 的环境，则称 f 在 x 点连续。如果 f 在每一点 $x\in X$ 连续，则称 f 是连续的。f 是连续的充要条件是：对 Y 中的每个开集 G，$f^{-1}(G)$是 X 中的开集。

设 $\mathscr{F}_1$、$\mathscr{F}_2$ 是 X 中的两个滤子，若 $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$（在集包含的意义下），则称 $\mathscr{F}_2$ 精于 $\mathscr{F}_1$。任意点 x 的完全环境组$\mathscr{V}(x)$是一个滤子，称为 x 点的邻滤子。若 X 上的一个滤子$\mathscr{F}$精于 x 的邻滤子，则称拓扑空间 X 上的滤子$\mathscr{F}$收敛于 x。设 $\{x_\alpha, \alpha\in A\}$ 是 X 中的定向点列，令 $S(\alpha_0)=\{x_\alpha|\alpha\geqslant\alpha_0\}$，则由 $\{S(\alpha), \alpha\in A\}$ 生成的滤子称为$\{x_\alpha\}$ 的截部滤子。定向点列 x_α 收敛于 x 的充要条件是它的截部滤子收敛于 x。

在集 X 上赋以两个拓扑 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$。如果每一个 $\mathscr{T}_1$-开集都是$\mathscr{T}_2$-开集，则称拓扑 $\mathscr{T}_2$ 精于拓扑 $\mathscr{T}_1$（或 $\mathscr{T}_1$ 粗于 $\mathscr{T}_2$），记为 $\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$。

设$(X, \mathscr{T})$是拓扑空间，A 是 X 的子集，如果在 A 上赋以一个拓扑，使它的开集就是 X 中的开集和 A 的交，则称 A 为 X 的子空间，其拓扑称为$\mathscr{T}$在 A 上的导出拓扑，记为 $\mathscr{T}|_A$，也称为 A 上的相对拓扑。

设 X 是拓扑空间，如果对 X 中的任意两个不同的点，必至少有一点的一个环境不包含第二个点，那末称 X 满足 T_0 分离公理；如果对 X 中的任意两个不同的点 x、y，x 必有一个环境不包含 y，而 y 也有一个环境不包含 x，则称 X 满足 T_1 分离公理；如果对 X 中的任意两个不同的点 x、y，存在 x、y 相应的环境 U、V，使得 $U\cap V=\emptyset$，则称 X 满足 Hausdorff（或 T_2）分离公理。拓扑空间 X 是 T_2 型的充要条件是：其中每个收敛定向点列的极限是唯一的。如果拓扑空间 X 是 T_1 型的，且每一点具有由闭环境组成的环境基，则称 X 是正则的（或 T_3 型的）。如果拓扑空间 X 是 T_2 型的，且对于每个闭子集 A 及每个 $b\bar{\in}A$，存在一个连续函数 $f: X\to[0,1]$，使 $f(b)=1$ 及 $x\in A$ 时 $f(x)=0$，则称 X 为全正则的。如果拓扑空间中每两个不相交的闭集 A、B，都存在开集 U、V，使 $A\subset U$，$B\subset V$，且 $U\cap V=\emptyset$，则称 X 是正规的（或 T_4 型的）。很明显，每个

正规空间是全正则的。每个全正则空间是正则的。

如果对于拓扑空间 X 中的每一点 x，都存在由至多可列个环境组成的基，则称 X 满足第一可列公理。

设 X 是 T_2 型拓扑空间，如果对于 X 的每个开覆盖都存在有限子覆盖，则称 X 是紧的。X 是紧的充要条件是：对于 X 中的每个闭集族，如其中有限个闭集均有非空交，则此闭集族必有非空交。X 中的子集 A 称为是紧的，是指把 A 看作 X 的子空间时是紧的。设 A 是 X 中的子集，如果 A 的闭包 $\bar{A}$ 是紧的，则称 A 是相对紧的。紧空间的每个闭子空间是紧的。任意个紧空间的拓扑积是紧的（称为 Тихонов 定理）。

三、线性空间

本书中将只讨论实数域或复数域上的线性空间。设 X 是线性空间，在 X 中能张成全空间的线性无关向量组称为 X 中的 Hamel 基。设 $\{x_\alpha, \alpha\in A\}$ 是 X 中的一个 Hamel 基，则对每个 $x\in X$，必存在有限个 $x_{\alpha_1},\cdots,x_{\alpha_n}$，使 $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_{\alpha_i}$，$\lambda_i\in K$（实数或复数域）。

定理 3 每个线性空间 X 都有 Hamel 基。

证 设 P 是 X 中的线性无关子集组成的集族。在 P 中按 $\subset$ 规定序，$A\leqslant B$ 即是指 $A\subset B$，P 是一个半序集。如果 P_1 是 P 中的任一全序子集，令 $B=\bigcup\{A, A\in P_1\}$，容易知道，B 是 X 中的线性无关向量组，$B\in P$，B 是 P_1 的上端。由 Zorn 引理即知 P 中必有极大元，此极大元即是 X 的 Hamel 基。证毕。

设 X 是线性空间，所有形如 x_0+M 的子集（其中 $x_0\in X$，M 是 X 的线性子空间）称为 X 中的（线性）流形。X 中的极大真子流形称为超平面。子集 $H\subset X$ 是超平面的充要条件为：存在 X 上的某线性泛函 f，使对某 $\alpha\in K$，$H=\{x\,|\,f(x)=\alpha\}$。

如果 M、N 是 X 的线性子空间，$X=M\oplus N$ 是代数直接和，则称 N 是 M 的代数补子空间。称 X/M 的维数为子空间 M 的余维数 (codimension)，或 co-维数。

第一章　线性拓扑空间

在本世纪初，泛函分析的主要研究对象是具体和抽象的线性赋范空间和其上的线性算子，在1920年以后，进一步讨论了线性距离空间。线性赋范空间和线性距离空间都有如下性质：首先，它们都是线性空间，即在空间中定义了加法和数量乘法两种代数运算，并且关于这两种运算是封闭的。其次，它们按照范数(或赋准范)所定义的距离成为一个拓扑空间，并且按照这个拓扑，线性空间中所定义的两种代数运算是连续的。这种既是代数系统又是拓扑空间的结构在泛函分析中是最有用的。但是，随着研究的不断深入，仅仅研究线性赋范空间或线性距离空间上的理论，应用起来是很不够的。例如，每个无限维线性赋范空间按弱拓扑就不是一个线性距离空间，这说明了引进并研究更为广泛的空间类是很必要的。在1934～1935年，由 Колмогоров 和 J. Von Neumann 几乎同时引进了线性拓扑空间的概念，它可以看作线性距离空间的一种推广。在此附带说明一下，有些书上为了区别于另一个概念，而把这里称作的线性拓扑空间叫做拓扑向量空间。

§1　定　　义

设 E 是一集，其中的元记为 x，y，…。如果在 E 中规定了线性运算和拓扑 $\mathscr{T}$，使得 E 满足下面三个条件：

(1) E 是一个线性空间（本书中只考虑当系数域 K 是实数域或复数域的情形，分别称为实线性空间和复线性空间）；

(2) E 上有一个拓扑 $\mathscr{T}$，使 $(E, \mathscr{T})$ 为拓扑空间；

(3) E 中的线性运算关于 E 上的拓扑 $\mathscr{T}$ 是连续的，即

(a) 乘积拓扑空间 $E\times E$ 到 E 的映照

$$(x, y)\longmapsto x+y$$

是连续的。

(b) 令数域 K 取欧几里得拓扑，乘积拓扑空间 $K\times E$ 到拓扑空间 E 的映照

$$(\lambda, x)\longmapsto \lambda x$$

是连续的。

则称 E 是一个线性拓扑空间。有时为了标明 E 上取拓扑 $\mathscr{T}$，把线性拓扑空间用记号 $(E, \mathscr{T})$ 或 $E(\mathscr{T})$ 表示。

设 E 是线性空间，$x\in E$，集 $A\subset E$，用 $A+x$ 表示集 $\{y+x\mid y\in A\}$，称它为 A 经过平移 x 后所成的集。又，如果 $B\subset E$，用 $A+B$ 表示集 $\{x+y\mid x\in A, y\in B\}$，称它为 A 和 B 的算术和。显然，平移可看作其特例，$A+x$ 即为 $A+\{x\}$，其中 $\{x\}$ 表示是由 x 一个元组成的单点集。类似地，可以定义 λA，$A-B$，$-A$ 等集。不过须注意：一般说来，不能断言 $2A=A+A$，但有 $2A\subset A+A$。

如果用拓扑空间的相应语言，条件(3)又可以表达如下：

(a') 对于 E 中任意一对向量 x、y，和 $x+y$ 的任一环境 U_{x+y} 必有 x、y 的相应环境 U_x、U_y，使得

$$U_x+U_y\subset U_{x+y}. \tag{1}$$

(b') 对于 E 中任一向量 x、任一数 $\lambda\in K$ 以及 λx 的任一环境 $U_{\lambda x}$，必有相应的正数 δ 和 x 的环境 U_x，使得当 $|\lambda-\mu|<\delta$ 时，有

$$\mu U_x\subset U_{\lambda x}. \tag{2}$$

我们可以把(a')和(b')中所取的环境限制在环境基中。

顺便指出，这里关于加法和数乘的连续性是指 $(x, y)\mapsto x+y$ 是 x、y 的二元连续映照；$(\lambda, x)\mapsto \lambda x$ 是 λ、x 的二元连续映照。这比分别关于一个变元的连续性的条件强。

在同一个线性空间上，通常可以规定几个拓扑，使它成为线性拓扑空间。下面我们可看到，如果在线性赋范空间中，用弱拓扑代替范数拓扑，也是一个线性拓扑空间。

设 E 是一个线性空间，如果在 E 上给定了拓扑 $\mathscr{T}$，使得 $(E, \mathscr{T})$

8710117

是一个线性拓扑空间，则就称 $\mathscr{T}$ 是 E 上的一个**向量拓扑**。从定义可直接知道，线性拓扑空间就是给定了一个向量拓扑的线性空间。

设 $(E_1, \mathscr{T}_1)$ 与 $(E_2, \mathscr{T}_2)$ 是两个线性拓扑空间，如果存在 E_1 到 E_2 上的一一映照 φ，使得 φ 既是线性空间 E_1 与 E_2 间的同构映照，同时又是拓扑空间 $(E_1, \mathscr{T}_1)$ 与 $(E_2, \mathscr{T}_2)$ 间的同胚映照（这样的映照 φ 称为**同构同胚映照**），则称线性拓扑空间 $(E_1, \mathscr{T}_1)$ 与 $(E_2, \mathscr{T}_2)$ 是**拓扑同构的**，或简称**同构的**，用记号 $(E_1, \mathscr{T}_1)\cong(E_2, \mathscr{T}_2)$ 表示之。

线性拓扑空间的拓扑可以局部化。即指：线性拓扑空间的拓扑可以用 0 点的环境(或一组环境基)完全确定。在线性拓扑空间 $(E, \mathscr{T})$ 中，0 的环境集合用记号 $\mathscr{N}(E, \mathscr{T})$ 或 $\mathscr{N}(E)$, $\mathscr{N}(\mathscr{T})$, $\mathscr{N}$ 简单表示之。有时也用 $\mathscr{N}_a$ 表示 a 点的环境集。

定理 1　设 E 是线性拓扑空间，$a\in E$，集合 $G\subset E$ 成为 a 点的环境的充要条件是：$G-a\in\mathscr{N}$。换句话说：$a+U\in\mathscr{N}_a$ 的充要条件是 $U\in\mathscr{N}$。

证　对 E 中的任一向量 a，作映照 $T_a: x\mapsto x+a$。由线性拓扑空间定义中的条件(3)的(a)可知：T_a 是连续映照。易知，T_a 的逆映照 $T_a^{-1}=T_{-a}: x\mapsto x-a$ 也是连续的。所以 T_a 是 E 到 E 上的拓扑同胚映照。因为 $T_a 0=a$，所以 $G\in\mathscr{N}_a$ 的充要条件是：$T_a^{-1}G=G-a$ 是 0 的某个环境。证毕。

定理 1 说明了线性拓扑空间的齐性。由定理 1 可知：对于每个向量拓扑可由某一点的环境全体所唯一确定，特别可以由 0 点的环境 $\mathscr{N}$ 唯一确定。$\{a+U\,|\,U\in\mathscr{N}\}$ 就是 E 中 a 点环境全体，即任一点 a 的环境可以由 0 的环境全体经平移 a 而得到。从而，线性空间 E 上的两个向量拓扑相同的充要条件是：在 0 点有相同的环境集合(或环境基)。与这个等价的是：两个向量拓扑相同的充要条件是：两个向量拓扑有相同的收敛于 0 的定向点列(net)。

例 1　设 E 是线性空间，在 E 中规定了最粗拓扑(即只有全空间及空集为开集)。这时加法和数乘运算的连续性是平凡的。除

了E是仅由$\{0\}$一个向量组成的这种情况外，它不满足分离性条件。

例 2 赋准范空间。实数或复数域K上的线性空间E叫做赋准范的，是指：存在由E到实数的一个映照$x\mapsto\|x\|$，满足下述条件(x、y表示E中的元)：

(a) $\|x\|\geqslant 0$，且$\|0\|=0$；

(b) $\|-x\|=\|x\|$；

(c) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$；

(d) 如果$t_n\to t$ (t_n、$t\in K$)，且$\{x_n\}\subset E$，$\|x_n-x\|\to 0$，则$\|t_nx_n-tx\|\to 0$。

这时，$\|x\|$称为元x的赋准范。赋准范空间$(E,\|\cdot\|)$上通常按距离$\rho(x,y)=\|x-y\|$引进拓扑成为一个距离空间。由定义容易直接验证，如果在E中$x_n\to x$，$y_n\to y$，数$t_n\to t$，则$t_nx_n+y_n\to tx+y$。由此可知，赋准范空间是一个线性拓扑空间。

特别是，赋范空间是赋准范空间，从而赋范空间按范数拓扑是线性拓扑空间。

设Φ是E上的拓扑集合，取强于Φ中的每个拓扑的最弱拓扑，记为$\vee\Phi$。拓扑$\vee\Phi$可以这样构造：记$O(T)$为关于拓扑T的开集全体，则$O(T)$关于有限交和任意个集的并一定封闭。把$\cup\{O(T),T\in\Phi\}$张成关于有限交和任意个集的并运算封闭的集合O'(即O'是包含$\cup\{O(T),T\in\Phi\}$且关于有限交和任意个集的并封闭的集族中最小的一个)，则由O'中的集作开集所定义的拓扑即是$\vee\Phi$，且是唯一确定的。容易验证$\vee\Phi$有如下的性质：对于任一拓扑空间S，映照$f: S\to(E,\vee\Phi)$成为连续的充要条件是：对于每一个$T\in\Phi$，映照$f: S\to(E,T)$是连续的。下述例子给出了由向量拓扑集合构造新的向量拓扑的一种方法。

例 3 设Φ是线性空间E上的向量拓扑集合，则$\vee\Phi$也是向量拓扑。由上面的叙述知道定向点列$\{x_\alpha\}$按拓扑$\vee\Phi$收敛于x_0的充要条件是对每一个$T\in\Phi$，有$x_\alpha\xrightarrow{T}x_0$。下面证明对于拓扑$\vee\Phi$，加法是连续的。设$\{x_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$、$\{y_\beta,\beta\in\mathscr{B}\}$是两个定向点

列，且按 $\bigvee\Phi$，$x_\alpha \to a$，$y_\beta \to b$，作半序集 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}=\{(\alpha,\beta)|\alpha\in\mathscr{A},\beta\in\mathscr{B}\}$，并且规定当 $\alpha\leqslant\alpha'$，$\beta\leqslant\beta'$ 时 $(\alpha,\beta)\leqslant(\alpha',\beta')$。作半序点列

$$\{x_\alpha+y_\beta|(\alpha,\beta)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}\}.$$

今证明它按照 $\bigvee\Phi$ 收敛于 $a+b$。事实上，由 $x_\alpha\xrightarrow{\bigvee\Phi}a$ 和 $y_\beta\xrightarrow{\bigvee\Phi}b$ 可知，对每一个 $T\in\Phi$ 也有 $x_\alpha\xrightarrow{T}a$，$y_\beta\xrightarrow{T}b$，因为 T 是向量拓扑，所以 $x_\alpha+y_\beta\xrightarrow{T}a+b$，从而 $x_\alpha+y_\beta\xrightarrow{\bigvee\Phi}a+b$。即 $(E,\bigvee\Phi)$ 中加法是连续的。同样可以证明关于数乘的连续性。因此 $\bigvee\Phi$ 是向量拓扑。

例 4　设 X 是线性空间。如果 F 是一族线性映照 f_i: $X\to Y_f$，其中 Y_f 是线性拓扑空间，那末在 X 上，唯一地存在使得 F 中的一切 f 都连续的最弱的向量拓扑，记为 σF。按 σF，$x_\alpha\to a$ 的充要条件是对每个 $f\in F$，$f(x_\alpha)$ 在 Y_f 中收敛于 $f(a)$。利用 f 的线性，与例3同样可证 σF 是 X 上的向量拓扑。

由例 4 可以知道线性拓扑空间的乘积空间是线性拓扑空间。事实上，设 $X_\alpha(\alpha\in A)$ 是一族线性拓扑空间，X 是所有形如 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ $(x_\alpha\in X_\alpha,\alpha\in A)$ 元的全体，称为 X_α，$\alpha\in A$ 的乘积集合，记为 $X=\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$，实际上，即是把 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 看作是一个元，其 α-坐标是 X_α 中的元。由 X 到 X_α 的映照

$$(x_\alpha)_{\alpha\in A}\mapsto x_{\alpha_0}\ (\alpha_0\in A)$$

称为 X 在 X_{α_0} 上的投影，记为 p_{α_0}，令 $p=\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$，则 X 上的乘积拓扑即是 σP。它是例 4 的特例。

§2　一些基本性质

由定义可知线性拓扑空间关于加法是一个拓扑群，在其上用自然的方式可引进一致性结构。在下面叙述的一些基本拓扑性质中，有一些是属于拓扑群和一致性空间的一般性质。

设 X 是线性拓扑空间，下面介绍它的一些基本性质。

(I) 对固定的元 $a\in X$，平移映照 τ_a: $x\mapsto x+a$ 是 X 到 X 上的拓扑同胚映照。拓扑同胚映照有时也简称为拓扑映照。

类似地可得

(II) 设 $\lambda\neq 0$，则映照 $x\mapsto\lambda x$ 是 X 到 X 上的拓扑映照。

由(II)可知，如果 $\lambda\neq 0$，则 $U\in\mathcal{N}$ 的充要条件是 $\lambda U\in\mathcal{N}$。

下述推论是有用的：集 $A\subset X$ 是开(闭)集的充要条件是：对任一 $\lambda\neq 0$，λA 是开(闭)集，或对于任一固定的元 a，$A+a$ 是开(闭)集。

(III) 对 X 中每一个 0 的环境 $V\in\mathcal{N}$，必存在 $U\in\mathcal{N}$，使得 $U+U\subset V$。

证 由于线性拓扑空间中的映照 $(x,y)\mapsto x+y$ 是 $X\times X$ 到 X 的连续映照，特别考虑到 $(0,0)$ 点的连续性，因为 $0+0\mapsto 0$，所以对每个 $V\in\mathcal{N}$，存在 U_1、$U_2\in\mathcal{N}$，使当 $x\in U_1$、$y\in U_2$ 时，有 $x+y\in V$，令 $U=U_1\cap U_2\in\mathcal{N}$，则

$$U+U\subset U_1+U_2\subset V.$$

(IV) 设 $x\in X$，V 是 x 的任一环境，则必有 x 的环境 U，使得 U 的闭包 $U^-\subset V$。

证 由(I)，我们只要考虑 $x=0$ 的情况。设 V 是任一 0 的环境，由(III)，存在 0 的环境 U，使得 $U+U\subset V$。下面证明 U 即为所求。事实上，若 $y\in U^-$，由闭包的定义，y 的环境 $y-U$ 和 U 相交，故 $y\in U+U\subset V$，$U^-\subset V$。

定理 1 对于线性拓扑空间 X，下述条件是等价的：

(a) X 是正则空间(即 T_3 型的)；

(b) $\{0\}$ 是闭集；

(c) 对 X 中的每一个向量 $x\neq 0$，存在 0 的环境 U，使 $x\bar{\in}U$。

由此，满足 T_0 公理的线性拓扑空间必是正则的。

证 (a)$\Longrightarrow$(b)是明显的。

设 $\{0\}$ 是闭集，由(I)的推论，对每一个 $x\in X$，$x\neq 0$，单点集 $\{x\}$ 也是闭集。所以存在 0 的环境 $U=X\ \{x\}$，使 $x\bar{\in}U$，即(b)$\Longrightarrow$(c)。

还要证$(c)\Longrightarrow(a)$。设条件(c)满足，则X必满足T_1分离公理。事实上，若$x\neq y$为X中的任意两点，则$x-y\neq 0$，根据条件(c)，存在0的环境U，使得$x-y\overline{\in}U$，由此$x\overline{\in}y+U$，即y的环境$y+U$不含x，同样可证存在x的环境不包含y。从而X满足T_1分离公理。根据(IV)，即知X是正则空间。

注： 定理中的结论还可以加强。设X是线性空间，$\mathcal{N}$是它的所有0点的环境的全体，令$\tilde{V}=\{(x,y)|x-y\in V\}$，则$X\times X$上的滤子$\mathcal{U}=\{\tilde{V}|V\in\mathcal{N}\}$在$X$上决定一个一致性结构，而它在$X$上导出的拓扑就是$X$上原来的拓扑。这样，每个线性拓扑空间都可用上述自然方式引入一个一致性结构而成为一致性空间。因为一致性空间一定是全正则的，所以分离的线性拓扑空间也必是全正则的。

定义 设集$A\subset X$。如果对每一个$x\in X$，必有正数λ_0，使得对一切的$|\lambda|\leqslant\lambda_0$，有$\lambda x\in A$，则称$A$是吸收的。

也就是说：对于X中的任一方向，A必包含此方向的以0为端点的线段。

(V) 线性拓扑空间中0的每个环境都是吸收的。

证 设V是0的环境，x是X中的任一元，由于$0\cdot x=0$，根据(II)知：必存在x的环境V_x和正数δ，使得当$|\lambda|\leqslant\delta$时，有

$$\lambda V_x\subset V.$$

从而$|\lambda|\leqslant\delta$时，$\lambda x\in\lambda V_x\subset V$，所以$V$是吸收的。证毕。

设X是线性空间，$A\subset X$。如果对于一切绝对值不超过1的数λ，即$|\lambda|\leqslant 1$，均有$\lambda A\subset A$，则称A是均衡的(balanced)。

定理 2 设X是线性拓扑空间，则对0的任何环境$V\in\mathcal{N}$，必有0的均衡环境$U\subset V$。0的均衡环境全体组成0的环境基。

证 设V是0的任一环境。由(II)可知：必有0的环境V_1和正数δ，使得当$|\lambda|\leqslant\delta$时，有

$$\lambda V_1\subset V.$$

作集

$$U=\bigcup_{|\lambda|\leqslant\delta}\lambda V_1,$$

就有$U\subset V$，又因为$U\supset\lambda V_1$，所以$U\in\mathscr{N}$，而且当$|\alpha|\leqslant 1$时，

$$\alpha U=\bigcup_{|\lambda|<\delta}\alpha\lambda V_1\subset\bigcup_{|\alpha\lambda|<\delta}\alpha\lambda V_1\subset U.$$

所以这种U的全体$\mathscr{V}$组成0的均衡环境基。

考虑到(IV)，定理结论可以加强如下：

推论 在线性拓扑空间中，0的闭均衡环境全体组成0的环境基。

由上述性质可以知道，如果$V\in\mathscr{N}$，则$-V\in\mathscr{N}$，所以x点的任一环境也可以写成$x-V$的形式。如果U是均衡的，则$U=-U$。在性质(III)中，对任一0的环境$V\in\mathscr{V}$，可以选择$U\in\mathscr{V}$，使得$U-U\subset V$。事实上，根据(III)，先选择$W\in\mathscr{N}$，使$W+W\subset V$。根据定理2，选择均衡环境$U\subset W$，则

$$U-U=U+U\subset W+W\subset V.$$

同时可进一步要求U是均衡闭的。在以后具体运用时，可按需选择不同形式的环境而不特别说明。

线性拓扑空间中还有一些经常使用的有关运算性质，在此只给出其中一部分的证明，其余的留给读者作为练习。

设X是线性拓扑空间。用小写英文字母表示X中的点；用大写英文字母表示X中的点集。用A^-表示集A的闭包；A^i表示A的开核，它是由A的内点全体组成。又用$\mathscr{N}$表示0的环境全体。

(a) $(x+A)^-=x+A^-$,

$(\lambda A)^-=\lambda A^-$;

(b) $A^-+B^-\subset(A+B)^-$;

(c) 设U是开集，则$A+U$是开集。

证 $A+U=\bigcup\{x+U\,|\,x\in A\}$，由$U$是开集知$x+U$也是开集，而$A+U$是一族开集的并集，故必也为开集。

(d) $A+B^i\subset(A+B)^i$.

证 由(c)，$A+B^i$是开集，又$A+B^i\subset A+B$，故知

(e) 如果C、D是X中的两个紧集，则$C+D$也是紧的。

证 因为C和D是X中的紧集，所以$C\times D$是$X\times X$中的紧

集。作映照 $T: (x, y) \mapsto x+y$，它是 $X\times X$ 到 X 中的连续映照。由于集 $C+D$ 是紧集 $C\times D$ 在连续映照 T 下的像，所以必是紧的。

(f) $A^- = \bigcap\{A+U \mid U\in\mathscr{N}\}$。

证 因为 $x\in A^-$ 的充要条件是 x 的每个环境 $x-U$ $(U\in\mathscr{N})$ 都和 A 有不空的交集，即 $x\in A+U$，所以 $A^- = \bigcap\{A+U \mid U\in\mathscr{N}\}$。

(g) 设 C 是紧集，U 是开集，如果 $C\subset U$，则存在 0 的环境 $V\in\mathscr{N}$，使得 $C+V\subset U$。

证 因为 U 是开集，对每个 $x\in C$，必有 0 的环境 W_x，使

$$x+W_x\subset U.$$

由 (HI)，存在开环境 $V_x\in\mathscr{N}$，使得 $V_x+V_x\subset W_x$。因为开集族 $\{x+V_x \mid x\in C\}$ 覆盖紧集 C，由 C 的紧性可选择有限个开集 $x_i+V_{x_i}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，使得

$$C\subset\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i+V_{x_i}\}.$$

令

$$V=\bigcap_{i=1}^{n}V_{x_i}.$$

则 $C+V\subset U$。事实上，如果 $x\in C$，则存在某个 k 使得 $x\in\{x_k+V_{x_k}\}$。因此 $x+V\subset x_k+V_{x_k}+V_{x_k}\subset x_k+W_{x_k}\subset U$。证毕。

(h) 设 C 是紧集，F 是闭集，则 $C+F$ 是闭集。

证 如果 $x\,\overline{\in}\, C+F$，则 $(x-C)\cap F=\varnothing$，即 $x-C\subset F^C$，F^C 表示 F 的余集。由(g)，存在 $V\in\mathscr{N}$，使得

$$x-C+V\subset F^C,$$

即是 $(x-C+V)\cap F=\varnothing$，因此 $(x+V)\cap(C+F)=\varnothing$，从而得到

$$x\,\overline{\in}\,(C+F)^-$$

这就是说 $C+F$ 是闭集。

必须注意，如果只知道 A、B 都是闭集，并不能推断 $A+B$ 是闭集。但以后可知道当 A 是有限维子空间，B 是闭线性子空间时，$A+B$ 一定是闭线性子空间。

(i) 线性拓扑空间 X 的子空间的闭包仍是 X 的子空间，特别是，$\{0\}$ 点的闭包是一个闭子空间。

(j) 凸集的闭包仍是凸集。

§3 向量拓扑局部基的构造

我们已经知道，向量拓扑可以由任意一点的环境全体所决定，特别可由其0点的环境全体$\mathscr{N}$所决定。如果已知向量拓扑0点的环境全体$\mathscr{N}$，那末任意一点x的环境可以由$\mathscr{N}$经过平移而得到，其全体为$\mathscr{N}_x=\{U+x|U\in\mathscr{N}\}$。线性拓扑空间$X$中0的一组环境基称为**线性拓扑空间的局部基**或**向量拓扑的局部基**。X上的任一向量拓扑是由其局部基所唯一确定的。因此，很自然地提出这样的问题：线性拓扑空间的局部基有什么特征？也就是怎样的子集族可以作为X上的某向量拓扑的局部基？回答了这个问题后，就可以据此给出在线性空间上构造向量拓扑的一般方法。

关于向量拓扑局部基的构造有如下定理：

定理 1 设E是线性空间，如果$\mathscr{V}$是某个向量拓扑的局部基，那末$\mathscr{V}$满足下述条件：

(1) 如果V_1、$V_2\in\mathscr{V}$，那末必有$V\in\mathscr{V}$使得$V\subset V_1\cap V_2$。

(2) 对每个$U\in\mathscr{V}$，必有$V\in\mathscr{V}$使$V+V\subset U$。

(3) 对每个$U\in\mathscr{V}$，必存在$V\in\mathscr{V}$，使得当$|\alpha|\leqslant1$、$\alpha\in K$时，$\alpha V\subset U$。

(4) $\mathscr{V}$中每个集是吸收的。

反过来，如果$\mathscr{V}$是满足上述条件的非空集族，那末E上必存在唯一的拓扑$\mathscr{T}$，以$\{x+V|V\in\mathscr{V}\}$作为点x的环境基，使拓扑$\mathscr{T}$成为E上的向量拓扑。

注 除条件(1)～(4)外，如果还满足下述条件：

(5) $\bigcap\limits_{V\in\mathscr{V}}V=\{0\}$，

则充要条件为拓扑$\mathscr{T}$是分离的。

引理 如果集族$\mathscr{V}$满足上述条件(2)，那末对于每个$V\in\mathscr{V}$及正整数n，必存在$V^{(n)}\in\mathscr{V}$，使得$\underbrace{V^{(n)}+\cdots+V^{(n)}}_{2^n个}\subset V$。

证 令 $V=V^{(0)}$，由(2)，依次取 $V^{(i)}\in\mathscr{V}$，使得

$$V^{(i)}+V^{(i)}\subset V^{(i-1)}\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

那末

$$\underbrace{V^{(n)}+\cdots+V^{(n)}}_{2^n\text{个}}\subset\underbrace{V^{(n-1)}+\cdots+V^{(n-1)}}_{2^{n-1}\text{个}}\subset\cdots\subset V.$$

定理的证明 必要性可直接由线性拓扑空间的基本性质推得。

充分性：设 E 中集族 $\mathscr{V}$ 满足条件(1)～(4)，令

$$\mathscr{V}_x=\{x+V\,|\,V\in\mathscr{V}\},$$

首先证明 $\mathscr{V}_x(x\in E)$ 在 E 上可以导出一个拓扑，只需验证：

(i) 如果 $W\in\mathscr{V}_x$，那末 $W=x+V$，其中 $V\in\mathscr{V}$。根据(4)，V 是吸收的，$0\in V$，这样，就可知道

$$W\in\mathscr{V}_x\Longrightarrow x=x+0\in x+V=W.$$

(ii) 对于任意 W_1、$W_2\in\mathscr{V}_x$，则有 V_1、$V_2\in\mathscr{V}$，使得 $W_1=x+V_1$，$W_2=x+V_2$。根据(1)，存在 $V\in\mathscr{V}$，使得

$$V\subset V_1\cap V_2,$$

令 $W=x+V\in\mathscr{V}_x$，则

$$W=x+V\subset(x+V_1)\cap(x+V_2)=W_1\cap W_2.$$

(iii) 对于任意 $W=x+V\in\mathscr{V}_x$，根据(2)，存在 $U\in\mathscr{V}$，使得 $U+U\subset V$，令 $W_1=x+U\in\mathscr{V}_x$，因为 $0\in U$，从而

$$W_1=x+U\subset x+U+U\subset x+V=W.$$

如果 $y\in W_1$，则由于

$$y+U\subset x+U+U\subset x+V=W,$$

故 W 是 W_1 中任意一点的环境。

所以，以 $\mathscr{V}_x(x\in E)$ 作为 x 点的环境基可以在 E 上唯一地定义一个拓扑结构 $\mathscr{T}$。下面再证明 $\mathscr{T}$ 是 E 上的向量拓扑。

首先证明数与向量的乘积运算是连续的。令 $y=\lambda x$，我们要证明对于 y 的每个环境 $y+U\in\mathscr{V}_y$，必存在 $V\in\mathscr{V}$ 以及正数 δ，使得当 $|\mu-\lambda|<\delta$ 时，

$$\mu(x+V)\subset y+U=\lambda x+U.$$

即要证明

$$(\mu-\lambda)x+\mu V\subset U.$$

为了达到这个目的，先由(2)，取 $W\in\mathscr{V}$，使 $W+W\subset U$。

由(3)，先取 $W_1\in\mathscr{V}$，使得当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时，有

$$\alpha W_1\subset W.$$

再由(4)，存在 $\beta\neq 0$，使得 $x\in\beta W_1$，所以当 $|\mu-\lambda|<\frac{1}{|\beta|}=\delta$ 时，

$$(\mu-\lambda)x\in(\mu-\lambda)\beta W_1\subset W.$$

不妨设 $\delta<1$，取足够大的正整数 n，使 $2^n>|\lambda|+1$。由引理知道：必存在 $W^{(n)}\in\mathscr{V}$，使

$$2^n W^{(n)}\subset\underbrace{W^{(n)}+\cdots+W^{(n)}}_{2^n\text{个}}\subset W.$$

再由(3)，存在 $V\in\mathscr{V}$，使当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时，$\alpha V\subset W^{(n)}$。因为 $|\mu|<|\lambda|+1$，所以 $|\mu|<2^n$，有

$$\mu V=2^n\left(\frac{\mu}{2^n}V\right)\subset 2^n W^{(n)}\subset W.$$

这样，当 $|\mu-\lambda|<\delta$ 时，存在 $V\in\mathscr{V}$，使得

$$\mu(x+V)=\lambda x+(\mu-\lambda)x+\mu V$$
$$\subset\lambda x+W+W=\lambda x+U.$$

这就证明了数乘运算 $(\lambda, x)\mapsto\lambda x$ 是连续的。

加法运算的连续性可以由(2)得到。取 $x+y$ 的任一环境 $x+y+U\,(U\in\mathscr{V})$，根据(2)，存在 $V\in\mathscr{V}$，使得 $V+V\subset U$，于是 x、y 的环境 $x+V$、$y+V$ 适合

$$(x+V)+(y+V)\subset x+y+U \qquad \text{证毕。}$$

例 1 设 R 是线性赋范空间。对于每个正数 ε，作集合

$$V_\varepsilon=\{x\mid\|x\|<\varepsilon\},$$

令 $\mathscr{V}=\{V_\varepsilon\mid\varepsilon>0\}$，容易知道集族 $\mathscr{V}$ 满足定理所设的条件，这时由 $\mathscr{V}$ 决定的向量拓扑就是 R 上由距离 $\rho(x,y)=\|x-y\|$ 所导出的拓扑。因而 R 按此距离导出的拓扑成为线性拓扑空间。

例 2 设 S 是一个由无限个元组成的集合，X 是集 S 上的实值函数的全体按通常运算組成的实线性空间，设

$$U_r=\{f\in X \mid \|f\|_\infty<r\},$$

其中 $\|f\|_\infty=\sup\limits_{t\in S}|f(t)|$，这里 $\|f\|_\infty$ 允许取值 $+\infty$。令 $\mathscr{V}=\{U_r|r>0\}$，如果以 $\mathscr{V}_f=\{f+U_r|r>0\}$ 作为 f 点的环境基，容易验证此时 X 成为一个拓扑空间，但是并不是一个线性拓扑空间。X 中的向量乘以数的运算不是连续的。实际上，集族 $\mathscr{V}$ 不满足定理中的条件 (4)。如果任取一个无限集合 $\{t_n\}\subset S$，可以如下定义一个实值函数 $f(t)\in X$：

$$f(t)=\begin{cases}n, & t=t_n;\\ 0, & t\overline{\in}\{t_n\}.\end{cases}$$

则对于 $\mathscr{V}$ 中的任一集 U_r，对任何 λ 都有 $\lambda f\overline{\in}U_r$，这表示 U_r 不是吸收的。

但是，如果我们令 $X_1=\{f \mid \|f\|_\infty<\infty, f\in X\}$，则 X_1 是 X 的线性子空间。如果把 X 上的拓扑限制在 X_1 上，那末定理中的条件均满足，X_1 成为一个线性拓扑空间。

例 3 设 R 是实数域，按通常运算成为实线性空间。若在 R 上取离散拓扑 d，那末 R 按离散拓扑不是一个线性拓扑空间。这是因为向量拓扑 0 点的每个环境必须是吸收的。当 R 上取离散拓扑 d 时，0 点本身即是它的一个环境，但是单点集 $\{0\}$ 并不是吸收集。

例 4 设有空间 $R(\Omega)$，Ω 表示局部紧拓扑空间（例如 n 维欧几里得空间），则 $R(\Omega)$ 表示定义在 Ω 上、在某紧集外等于 0 的实值或复值函数 $x(t)$ 的全体。通常称集

$$\{t\in\Omega \mid x(t)\neq 0\}$$

在 Ω 中的闭包为 $x(t)$ 的支柱。$R(\Omega)$ 即是 Ω 上具有紧支集的实值或复值函数的全体。设 $\varDelta$ 表示 Ω 中紧集所成的集族，令

$$U_{D,\varepsilon}=\{x\in R(\Omega) \mid t\in D\Longrightarrow |x(t)|<\varepsilon\},$$

这里 $D\in\varDelta$，$\varepsilon>0$。不难看出，$\{U_{D,\varepsilon}|D\in\varDelta,\ \varepsilon>0\}$ 满足定理 1 中关于集族 $\mathscr{V}$ 的条件，以它为局部基唯一地确定一个向量拓扑，从而 $R(\Omega)$ 按照这个向量拓扑成为线性拓扑空间。注意在 $R(\Omega)$ 中，$x_n(t)\to x(t)$ 表示函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 Ω 的每个紧集上一致收敛于 $x(t)$。

§4 有界集

设E是一个线性拓扑空间，S是E的子集。如果对于每一个0的环境$U\in\mathscr{N}$，存在一个正数δ，使得当$|\lambda|\leqslant\delta$时，$\lambda S\subset U$，则称S是E中的有界集。

设A、B是一个线性空间的两个子集，如果存在$\delta>0$，使得当$|\lambda|\leqslant\delta$时，$\lambda A\subset B$，则称集A被B吸收。所以线性拓扑空间中的子集S是有界集的充要条件是：S被0的每个环境吸收。

在线性赋范空间中，有界集的概念和本节的定义是一致的。设R是一个线性赋范空间，$\|\cdot\|$是R上的范数，根据§1可知道$(R,\|\cdot\|)$是一个线性拓扑空间，令

$$\mathscr{V}=\{V_\varepsilon|\varepsilon>0\},$$

其中$V_\varepsilon=\{x\mid\|x\|<\varepsilon\}$，则$\mathscr{V}$组成0点的环境基。如果集合$A\subset R$被0的每个环境吸收，则对于环境$V_1=\{x\mid\|x\|<1\}$，有正数$\delta$，使得$\delta A\subset V_1$，从而$\sup\limits_{x\in A}\|x\|<\frac{1}{\delta}$。反之，如果对于一切$x\in A$，有$\|x\|<C$，则对0点环境基中的任一环境$V_\varepsilon$，取$\delta<\frac{\varepsilon}{C}$，当$|\lambda|\leqslant\delta$时，$\lambda A\subset V_\varepsilon$，即$A$被0的每一个环境吸收。

线性拓扑空间中的有界集的概念和一般距离空间中的有界集的概念本质上有很大的区别。距离空间的有界集并不是拓扑不变的。这就是说，对于拓扑同胚的两个距离，相应的有界集可以是不一样的。例如，设(R,ρ)是全空间为无界的距离空间。如果令

$$\rho_1(x,y)=\begin{cases}\rho(x,y), & \text{当 }\rho(x,y)<1;\\ 1, & \text{当 }\rho(x,y)\geqslant 1.\end{cases}$$

那末R上由距离ρ_1和ρ_2所定义的拓扑是一致的。而因为$\rho_1\leqslant 1$，R中任何点集关于距离ρ_1是有界集，特别是，全空间是有界集。这样，我们在R上构造了两个决定同样拓扑的距离ρ和ρ_1，但是对于ρ和ρ_1有着不同的有界集类。在线性拓扑空间中，有界集关于向量拓扑是拓扑不变的。就是说，若在线性空间E上给定两个拓

扑等价的向量拓扑，它们相应的有界集必定是一样的。这就使得有界集成为线性拓扑空间理论中的重要概念之一。

在线性拓扑空间中单点集是有界集，这可以由 0 的每个环境是吸收的这一性质直接推得。另外，如果 A、B 是两个有界集，那末 $A\cup B$ 也是有界集。事实上，对于 0 的每个环境 U，由 A、B是有界集，存在正数 ε_1 和 ε_2，使得当 $|t|<\varepsilon_1$ 时，$tA\subset U$；而当 $|t|<\varepsilon_2$ 时，$tB\subset U$。于是当 $|t|<\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 时，$t(A\cup B)\subset U$。同样可证，有限个有界集的并集 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 是有界的。在线性拓扑空间中，有界集经平移和相似变换所得的集 $A+x$ 及 λA 仍是有界的，有界集的线性组合 $\sum_{i=1}^{n} a_i A_i$ 是有界的，有界集的均衡闭包是有界集。

定理 1　设 B 是线性拓扑空间 E 中的点集，则下面所述条件是相互等价的。

(a)　B 是有界集；

(b)　对于趋于 0 的任何数列 $\{\lambda_n\}$ 以及点集 B 中的任何点列 $\{x_n\}$，可推得 $\lambda_n x_n\to 0$；

(c)　对于点集 B 中的任何点列 $\{x_n\}$，均有 $\frac{1}{n}x_n\to 0$。

证　(a)$\Longrightarrow$(b)：设 U 是 0 的任一环境，因假设 B 是有界集，存在 $\varepsilon>0$，使得当 $|t|\leqslant\varepsilon$ 时，$tB\subset U$。又因 $\lambda_n\to 0$，可找到 N，当 $n>N$ 时，$|\lambda_n|<\varepsilon$。所以当 $n>N$ 时，

$$\lambda_n x_n\in\lambda_n B\subset U,$$

即知 $\lambda_n x_n\to 0$。

(b)$\Longrightarrow$(c)：是显然的。

(c)$\Longrightarrow$(a)：用反证法证：如果条件(c)满足，而 B 不是有界集，则至少存在一个 0 的环境 V，它不吸收 B。取 0 的均衡环境 $U\subset V$，则对于每个自然数 n，有

$$\frac{1}{n}B\not\subset U.$$

事实上，如果对某个自然数 n，有 $\frac{1}{n}B\subset U$，由 U 的均衡性可知道：对于一切 $|\lambda|<\frac{1}{n}$，均有 $\lambda B\subset\frac{1}{n}B\subset U\subset V$，则 B 就被 V 吸收，这就与 V 的选取相矛盾。由此，任意选取 $y_n\in\frac{1}{n}B\setminus U(n=1,2,\cdots)$，令 $x_n=ny_n$，则 $x_n\in B$，而

$$\frac{1}{n}x_n=y_n\notin U\quad(n=1,2,\cdots),$$

这就是说

$$\frac{1}{n}x_n\not\to 0.$$

这与条件(C)的假设相矛盾。从而 B 是有界集。证毕。

定义 设 T 是线性拓扑空间 X 到线性拓扑空间 Y 的映照。如果 T 把 X 中的每个有界集映为 Y 中的有界集，则称映照 T 是保持有界集的。

注：在此应强调指出：目前通常称把某个 0 的环境映为有界集的线性映照为有界的。显然，有界线性映照必是保持有界集的，反之则不然。当 X 是赋范空间时，两者是一致的。考虑到习惯，在本书中，直至第四章 §7 为止，仍把保持有界集的映照简称为有界的。

在泛函分析中曾提到，由赋范空间到赋范空间的线性映照(或称为线性算子)是连续映照的充要条件是有界的。在线性拓扑空间也有类似结论如下：

定理 2 设 T 是线性拓扑空间 X 到线性拓扑空间 Y 的线性映照，如果 T 是序列连续的，则映照 T 是有界的。

特别是，连续线性映照是有界的。

证 设 A 是 X 中的任一有界集，T 是序列连续的，为证明 T 是有界的，只要证明 TA 是线性拓扑空间 Y 中的有界集。任取一点列 $\{y_n\}\subset TA$，则有 $x_n\in A$，使 $y_n=Tx_n(n=1,2,\cdots)$，因为 A 是有界集，根据定理 1 中的(a)$\Longrightarrow$(c)，可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}x_n=0.$$

又因映照 T 是序列连续的，从而得知

$$\frac{1}{n} y_n = T\left(\frac{1}{n} x_n\right) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

再根据定理 1 中的(c) ⟹ (a)，即知 TA 是有界集。

由于连续映照一定是序列连续的，即知线性拓扑空间之间的连续线性映照是有界的。证毕。

由定义可知线性拓扑空间中的有界集概念是与 0 点的环境基，也就是与向量拓扑有关。在一个线性空间上如果定义了两个不同的向量拓扑 $\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{T}'$。则将 $(X, \mathscr{T})$ 中的有界点集 A 看作 $(X, \mathscr{T}')$ 中的点集时，就不一定是有界的，反过来也一样。为了明确起见，我们经常把例如 $(X, \mathscr{T})$ 中的有界集称为关于拓扑 $\mathscr{T}$ 的有界集或 $\mathscr{T}$ 有界集。下述结论是很重要的。

系 设 $\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{T}'$ 是线性空间 X 上的两个向量拓扑，并且 $\mathscr{T}' \supset \mathscr{T}$。那末 X 中关于较强拓扑 $\mathscr{T}'$ 的有界集一定也是关于较弱拓扑 $\mathscr{T}$ 的有界集。

证 作线性拓扑空间 $(X, \mathscr{T}')$ 到 $(X, \mathscr{T})$ 的恒等映照

$$\theta: x \mapsto x, \quad x \in X.$$

由于 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$，$\theta$ 是连续线性映照。根据定理 2，θ 是有界的。由此，线性拓扑空间 $(X, \mathscr{T}')$ 中的有界集经映照 θ 把它看成线性拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 中的点集是有界的。证毕。

由于赋范空间之间的有界线性映照必是连续的，所以在线性空间上由范数给定的拓扑可以由它的有界集全体唯一确定。但是一般来说，向量拓扑还不能由它的有界集全体唯一确定，有界线性映照不一定是连续的。

例 1 设 X 是赋范空间，在其上定义范数 $\|\cdot\|$。由范数 $\|\cdot\|$ 决定的拓扑称为强拓扑 τ。设 X' 是 X 的共轭空间，线性空间 X 上除了范数拓扑外还可以定义弱拓扑，记为 $\sigma(X, X')$，它在 0 点的环境基为

$$\mathscr{V} = \{V(f_1, \cdots, f_n, \varepsilon) \mid f_i \in X', \varepsilon > 0, n \in N\},$$

其中 $V(f_1, \cdots, f_n, \varepsilon) = \{x \mid |f_1(x)| < \varepsilon, \cdots, |f_n(x)| < \varepsilon\}$。

由§3定理1，容易验证$\sigma(X, X')$是X上的向量拓扑。按$\sigma(X,X')$拓扑$x_\nu\to x_0$的充要条件是对每一个$f\in X'$，有$f(x_\nu)\to f(x_0)$。容易知道X上的范数拓扑强于弱拓扑，即$\tau\supset\sigma(X,X')$。于是由定理2的系，X中关于拓扑τ的有界集必是$\sigma(X, X')$有界的。反过来，若集S是$\sigma(X, X')$有界的，则对每一个$f\in X'$，有

$$\sup_{x\in S}|f(x)|<\infty。$$

由共鸣定理知道，S必是强有界的。所以X中强有界集和弱有界集是一致的。但是，稍后可知道，除了X是有限维的情形外，总有$\sigma(X, X')\subsetneqq\tau$。这说明不同的向量拓扑$\tau$与$\sigma$可以有相同的有界集。

令θ为(X, σ)到(X, τ)的恒等映照，由于σ和τ有相同的有界集，θ是有界线性映照。而当X是无限维空间时，由上面所述的$\sigma\subsetneqq\tau$，故此时θ不是连续的。这就是一个有界线性映照不是连续的例子。

§5 完 备 性

类似于距离空间的情形，在线性拓扑空间中可以引进基本定向点列和完备性的概念。实际上，这些概念同样可以在具有一致性结构的一致性空间中引入。

定义 设R是一个线性拓扑空间，$\{x_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$是$R$中的定向点列，如果对于0的每个环境$V$，必存在$\alpha_0\in\mathscr{A}$，使得

$$\alpha\geqslant\alpha_0,\ \alpha'\geqslant\alpha_0\Longrightarrow x_\alpha-x_{\alpha'}\in V,$$

则称$\{x_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$为一个*基本定向点列*(Cauchy net)。

特别是，如果一个基本定向点列是一个序列$\{x_n\}$时，也可称为*基本序列*(Cauchy Sequence)。

(I) 在线性拓扑空间中收敛的定向点列 (net) 必定是基本的。

证 设$\{x_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$是线性拓扑空间$R$中的定向点列，并且收敛于$x$，即$x_\alpha\to x$。对于0的任一环境$V$，由§2中的(III)和定理2

可知道，必存在 0 的均衡环境 U，使得 $U+U\subset V$。对于 x 点的环境 $x+U$，由于 $x_\alpha\to x$，存在 $\alpha_0\in\mathscr{A}$，使得当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时，

$$x_\alpha\in x+U.$$

因此当 $\alpha,\ \alpha'\geqslant\alpha_0$ 时，

$$x_\alpha-x_{\alpha'}\in(x_0+U)-(x_0+U)=U-U\subset V.$$

所以 x_α 是基本的。

定义　设 R 是一个线性拓扑空间，如果对于 R 中的每个基本定向点列都收敛，则称 R 是完备的（也称为一致完备）。如果 R 中每个基本序列都收敛于 R 中的一点，则称 R 是序列完备的。

明显地，完备的线性拓扑空间一定是序列完备的。但是反过来不一定对。假如设 R 是一个无限维的 Banach 空间，R' 是它的共轭空间。在 R' 取弱*收敛拓扑，记为 $\sigma(R',R)$ 或 σ^*，容易知道 (R',σ^*) 是一个线性拓扑空间，它的局部基是

$$\mathscr{V}=\{U(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ \varepsilon)\,|\,x_i\in R,\ \varepsilon>0,\ n\in N\},$$

其中

$$U(x_1,\cdots,x_n,\varepsilon)=\{f\ \big|\ |f(x_1)|<\varepsilon,\ \cdots,\ |f(x_n)|<\varepsilon\}$$

由共鸣定理知道 (R',σ^*) 是序列完备的，但是它不是完备的。如果用 R^* 表示 R 上的线性泛函全体，则 $R'\subsetneqq R^*$。(R',σ^*) 可以看作 (R^*,σ^*) 的子空间，且是稠密的。由于 (R^*,σ^*) 是完备的，由此 (R',σ^*) 一定不完备，否则，由下述(III)可推得 $R'=R^*$，而这是不可能的。

但是，对于赋准范空间有以下定理：

定理 1　序列完备的赋准范空间是完备的。

证　设 $\{x_\alpha,\ \alpha\in\mathscr{A}\}$ 是赋准范空间 X 中的基本定向点列，用归纳法可以取到一列 $\alpha_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$，$\alpha_n\geqslant\alpha_{n-1}$，使当 α、$\alpha'\geqslant\alpha_n$ 时，

$$\|x_\alpha-x_{\alpha'}\|<\frac{1}{n}.$$

令 $y_n=x_{\alpha_n}$，则 $\{y_n\}$ 是一个基本序列。由假定，X 是序列完备的，必存在 $x\in X$，使得 $y_n\to x$。下面证明 $x_\alpha\to x$。对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取充分大的 N，使得 $N>\dfrac{2}{\varepsilon}$，并且 $\|y_N-x\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当 $\alpha\geqslant\alpha_N$ 时，

$$|x_\alpha - x| \leqslant |x_\alpha - y_N| + |y_N - x| < \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

所以 $x_\alpha \to x$，X 是完备的。证毕。

（II）设 f 是线性拓扑空间 X 到线性拓扑空间 Y 的连续线性映照，如果 $\{x_\alpha, \alpha \in \mathscr{A}\}$ 是 X 中基本定向点列，那末它的像 $\{f(x_\alpha), \alpha \in \mathscr{A}\}$ 必是 Y 中的基本定向点列。

定义 设 A 是线性拓扑空间 X 的子集，如果对于 A 中的每个基本定向点列必收敛于 A 中的某点，则称 A 是完备的。如果对于 A 中的每个基本序列必收敛于 A 中的某点，则称 A 是序列完备的。

（III）完备的线性拓扑空间 X 的闭子集 A 是完备的。反之，如果线性拓扑空间 X 是分离的，那末 X 中的每个完备子集 A 一定是闭集。

证 前面的结论可由定义直接推知。反之，设 X 是分离的线性拓扑空间，那末每一个收敛的定向点列只能有一个极限点。设 $x_0 \in \overline{A}$，则必存在一个定向点列 $x_\nu \in A$，使得

$$\lim x_\nu = x_0.$$

根据（I），x_ν 是 A 中的基本定向点列。由于 A 是完备的，x_ν 必收敛于 A 中的某点 x，则由极限的唯一性，$x_0 = x \in A$，即知 A 是闭集。证毕。

这个简单的性质是完备性最重要的性质之一。对于完备的分离的线性拓扑空间，子集 A 完备的充要条件为 A 是闭集。

（IV）在线性拓扑空间中，每个基本序列 $\{x_n\}$ 是有界的。

证 在 $\{x_n\}$ 中任取一列点，容易知道它仍然是一个基本序列，所以不妨仍记作 $\{x_n\}$，根据§4中的定理1，为要证明 $\{x_n\}$ 是有界集，只要证明

$$\frac{1}{n} x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

设 V 是 0 的任一环境，根据§2，存在 0 的均衡环境 U，使得 $U + U \subset V$。由于 $\{x_n\}$ 是基本序列，存在 N，使当 m、$n \geqslant N$ 时，$x_m - x_n \in U$。然后对固定的点 x_N 取 N' 充分大，使当 $n > N'$ 时，

$\frac{1}{n}x_N\in U$，则当 $n>\max(N, N')$ 时，

$$\frac{1}{n}x_n=\frac{1}{n}x_N+\frac{1}{n}(x_n-x_N)\subset U+U\subset V.$$

所以 $\lim\frac{1}{n}x_n=0$。证毕。

这里要注意的是：线性拓扑空间中一般的基本定向点列不一定是有界的。

定义　设X是线性拓扑空间，如果X中每个有界的基本定向点列必收敛于X中的一点，则称X是*有界完备的*（或称*拟完备的*）。

类似地，对点集 A 也可以引入有界完备性。

容易知道完备的线性拓扑空间是有界完备的。根据（IV）知道，有界完备的线性拓扑空间是序列完备的。由定理1可知道，对于赋准范空间这三个概念是一致的。但是一般说来，相反的包含关系不一定对，可以给出反例。

设(X, T)是完备的线性拓扑空间，如果将向量拓扑减弱或加强，那末线性拓扑空间的完备性就不能保证。但是有下面所述的重要定理：

定理 2　设$\mathscr{T}$与$\mathscr{T}'$是线性空间X上的两个向量拓扑，且$\mathscr{T}'\supset\mathscr{T}$，并且满足如下条件：关于向量拓扑$\mathscr{T}'$存在0的一个环境基$\mathscr{V}$，而$\mathscr{V}$中的每个0的环境关于向量拓扑$\mathscr{T}$是闭集（序列闭的；有界闭的）。如果集 $S\subset X$ 关于$\mathscr{T}$是完备的（序列完备；有界完备）。那末 S 关于向量拓扑$\mathscr{T}'$也是完备的（序列完备；有界完备）。

证　设$\{x_\nu\}$是 S 中的关于$\mathscr{T}'$的基本定向点列，因为$\mathscr{T}'\supset\mathscr{T}$，由（II）知道$\{x_\nu\}$也是关于拓扑$\mathscr{T}$的基本定向点列。根据假定，$S$ 关于$\mathscr{T}$是完备的，所以存在一个点 $a\in S$，使得

$$x_\nu\xrightarrow{\mathscr{T}}a.$$

如要证明 S 关于$\mathscr{T}'$是完备的，只要证明 $x_\nu\xrightarrow{\mathscr{T}'}a$ 即可。

设 U 是关于$\mathscr{T}'$拓扑0的环境基$\mathscr{V}$中的任一环境。因为$\{x_\nu\}$

关于$\mathscr{T}'$是基本的，所以必定存在ν_0，使得当α, $\beta\geqslant\nu_0$时，

$$x_\alpha - x_\beta \in U.$$

根据假设，U关于拓扑$\mathscr{T}$是闭集。对上面的式子关于$\mathscr{T}$对x_β取极限，由于$x_\beta \xrightarrow{\mathscr{T}} a$，得到

$$x_\alpha - a = \lim_\beta (x_\alpha - x_\beta) \in [U]_{\mathscr{T}} = U.$$

则当$\alpha\geqslant\nu_0$时，$x_\alpha - a \in U$，即证明了$x_\alpha \xrightarrow{\mathscr{T}'} a$。　证毕。

对于序列完备的相应结论的证明是类似的。如果考虑到关于$\mathscr{T}'$的有界集关于较弱拓扑$\mathscr{T}$一定也是有界的，同样可以证明有界完备情形的相应结论。

系　设线性空间X上的向量拓扑$\mathscr{T}$与$\mathscr{T}'$满足定理2中所述的条件。如果关于$\mathscr{T}'$的基本定向点列$\{x_\nu\}$按拓扑$\mathscr{T}$，有$x_\nu \xrightarrow{\mathscr{T}} a$，则必定有$x_\nu \xrightarrow{\mathscr{T}'} a$。

由上述讨论可以看到，关于线性拓扑空间完备性的一些叙述，是和距离空间十分相似的。但是应该指出，严格地讲，线性拓扑空间的完备性概念和距离空间的完备性概念是不同的。线性拓扑空间中的基本定向点列x_ν是指对于每一个$V\in\mathscr{N}$，存在α_ν，使得当α, $\alpha'\geqslant\alpha_\nu$时，$x_\alpha - x_{\alpha'}\in V$。而距离空间中的基本定向点列是指：对于任一$\varepsilon>0$，能找到$\alpha_\varepsilon$，使得当$\alpha$, $\alpha'\geqslant\alpha_\varepsilon$时，$\rho(x_\alpha, x_{\alpha'})<\varepsilon$，即$x_\alpha\in O(x_{\alpha'}, \varepsilon)$，至于$x_\alpha - x_{\alpha'}$是否属于$O(0, \varepsilon)$？是不知道的。例如，实直线$R$按照通常拓扑是一个完备的线性拓扑空间。如果在$R$上另外定义一个距离：

$$\rho(x, y) = |\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y|,$$

则由距离$\rho(x, y)$定义的拓扑和直线上原来的拓扑是一样的。但是，如果把(R, ρ)看作距离空间，并不是完备的，事实上，$x_n = n$是其中的基本点列，但是并不收敛。不过，如果线性拓扑空间X上的向量拓扑可以用一个平移不变的拟距离给出，所谓平移不变的拟距离是指对于每一个x、y、$z\in X$，必定有

$$\rho(x, y) = \rho(x+z, y+z).$$

这时，由定义容易知道，线性拓扑空间 X 是完备的充要条件是：(X, ρ) 是完备的距离空间。

在此顺便指出，在距离空间中完备性概念不是一个拓扑概念。这一点可以从上面所述的例子看出来。而在线性拓扑空间中，完备性是一个拓扑概念，这可由定义直接得知。

对于线性拓扑空间有下面的完备化定理，从本质上说，是把线性拓扑空间看作一致性空间进行完备化。

定理 3　设 R 是一个线性拓扑空间，则 R 必可完备化。也就是说，存在一个完备的线性拓扑空间 $\tilde{R}_1$，使 R 同构于 $\tilde{R}$ 的一个稠密子空间。并且 R 的完备化空间 $\tilde{R}$ 在同构意义下是唯一决定的。

证　1) 设 R_1 是 R 中的一切基本定向点列的全体。在 R_1 上规定线性运算如下：设 $\eta=\{x_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}\in R_1$、$t$ 为一数，定义

$$t\eta=\{tx_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}.$$

显然 $t\eta\in R_1$。加法运算定义如下：设 $\xi=\{x_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$，$\eta=\{x_\beta, \beta\in\mathscr{B}\}$ 是 R 中的两个基本定向点列，属于 R_1。作集

$$\mathscr{A}\times\mathscr{B}=\{(\alpha, \beta), \alpha\in\mathscr{A}, \beta\in\mathscr{B}\},$$

规定序关系如下：

$$\alpha\leqslant\alpha', \beta\leqslant\beta'\Longleftrightarrow(\alpha, \beta)\leqslant(\alpha', \beta').$$

显然 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 是定向半序集。作定向点列

$$\lambda=\{x_\alpha+x_\beta, (\alpha, \beta)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}\}.$$

下面证明 $\lambda\in R_1$。事实上，对于 0 的任何环境 $V\in\mathscr{N}$，必存在 $U\in\mathscr{N}$，使得 $U+U\subset V$。由于 $\{x_\alpha\}$、$\{x_\beta\}$ 是基本定向点列，必存在 $\alpha_0\in\mathscr{A}$、$\beta_0\in\mathscr{B}$，使得

当 α、$\alpha'\geqslant\alpha_0$ 时，　$x_\alpha-x_{\alpha'}\in U$；

当 β、$\beta'\geqslant\beta_0$ 时，　$x_\beta-x_{\beta'}\in U$。

因此，当 $(\alpha, \beta)\geqslant(\alpha_0, \beta_0)$、$(\alpha', \beta')\geqslant(\alpha_0, \beta_0)$ 时，

$$(x_\alpha+x_\beta)-(x_{\alpha'}+x_{\beta'})=(x_\alpha-x_{\alpha'})+(x_\beta-x_{\beta'})\in U+U\subset V.$$

从而 λ 是基本定向点列，所以 $\lambda\in R_1$。定义 $\lambda=\xi+\eta$。容易验证 R_1 是一个线性空间。

我们在 R_1 中引进等价关系 Ω，如果 ξ、$\eta\in R_1$，而 $\xi-\eta$ 是 R

中收敛于 0 的基本定向点列，则称 ξ 和 η 等价，记作 $\xi\sim\eta(\Omega)$。为叙述简便起见，我们把 R_1 中凡是等价的元看作是同一个元素。实际上，即是考虑 R_1 按 Ω 的商线性空间。容易知道，如果 $\xi_1\sim\eta_1$，$\xi_2\sim\eta_2$，则线性组合 $a\xi_1+b\xi_2\sim a\eta_1+b\eta_2$。这样在 R_1 上仍然可以定义上面所述的数乘和加法，成为一个线性空间。

2) 我们在 R_1 上引进拓扑如下：设 V 是 R 中 0 的任一环境，$\xi=\{x_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$ 是 R_1 中这样的元，存在 0 的环境 $U\in\mathscr{N}(R)$ 以及 $\alpha_0\in\mathscr{A}$，使得

$$\{x_\alpha|\alpha\geqslant\alpha_0\}+U\subset V.$$

记这种 ξ 的全体为 $\tilde{V}$。易知如果 $\xi\in\tilde{V}$，而 $\xi\sim\eta$，则 $\eta\in\tilde{V}$。

设 $\mathscr{V}$ 是 R 中 0 的均衡的开环境的全体组成的环境基。令

$$\tilde{\mathscr{V}}=\{\tilde{V}|V\in\mathscr{V}\}.$$

下面验证 R_1 中的集族 $\tilde{\mathscr{V}}$ 满足§3 的定理 1 中所述的条件。其中条件(1)(2)(3)是比较明显的。下面验证条件(4)：任取 $\tilde{V}\in\tilde{\mathscr{V}}$，其中 $V\in\mathscr{V}$。对于 R_1 中的任一元 $\lambda=\{x_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}\in R_1$，需证明 $\tilde{V}$ 吸收 λ。在线性拓扑空间 R 中，$V\in\mathscr{N}$。必存在 $U\in\mathscr{N}$ 使得 $U+U+U\subset V$。由于 $\{x_\alpha\}$ 是基本定向点列，故必存在 α_0，使当

$$\alpha、\alpha'\geqslant\alpha_0\Longrightarrow x_\alpha-x_{\alpha'}\in U.$$

对于 x_{α_0}，因为 U 是 R 中的吸收集，故必存在 $\delta>0$，使当 $|t|\leqslant\delta$ 时，

$$tx_{\alpha_0}\in U.$$

不妨取 $\delta\leqslant1$，所以当 $|t|\leqslant\delta$，且 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时，

$$tx_\alpha=tx_{\alpha_0}+t(x_\alpha-x_{\alpha_0})\subset U+U.$$

由此

$$\{tx_{\alpha_0}|\alpha\geqslant\alpha_0\}+U\subset U+U+U\subset V.$$

故当 $|t|\leqslant\delta$ 时，

$$t\lambda=\{tx_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}\in\tilde{V}.$$

即 $\tilde{V}$ 是吸收的。

根据§3定理 1，R_1 中存在唯一的向量拓扑 $\mathscr{T}$，使 R_1 成为一个线性拓扑空间，并且以 $\tilde{\mathscr{V}}$ 作为 0 点的环境基。

3) 我们作 R 到 R_1 的映照 φ 如下：对每个 $x\in R$，任取一个定向集 $\mathscr{A}$，作定向点列 $\tilde{x}=\{x_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$，其中 $x_\alpha=x$，$\alpha\in\mathscr{A}$，令

$$\varphi: x\mapsto\tilde{x}.$$

易知 φ 是 R 到 $\varphi(R)\subset R_1$ 的代数同构映照。下面证明 φ 是 R 到 $\varphi(R)$ 的拓扑映照，其中 $\varphi(R)$ 看作 $(R_1, \mathscr{T})$ 的子空间。

对于每个 $V\in\mathscr{V}$，只要能证明 $\varphi(V)=\tilde{V}\varphi(R)$，就可以知道 φ 是拓扑映照。事实上，设 $x\in V$，因 V 是开的，故必存在 $W\in\mathscr{V}$，使 $x+W\subset V$，因此 $\{x_\alpha=x|\alpha\in\mathscr{A}\}+W\subset V$，即知 $\tilde{x}\in\tilde{V}$，从而 $\varphi(V)\subset\tilde{V}\varphi(R)$。反之，如果 $x\in R$，而 $\tilde{x}\in\tilde{V}$，那末 $x\in V$，由此 $\varphi(V)=\tilde{V}\varphi(R)$。

4) 现在证明 $\varphi(R)$ 在 R_1 中是稠密的。事实上，如果任取 $\xi=\{x_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}\in R_1$，对于 R_1 中 0 的环境 $\tilde{V}\in\tilde{\mathscr{V}}$，其中 $V\in\mathscr{N}(R)$，取 $U\in\mathscr{V}$，使得 $U+U\subset V$。由于 x_α 是基本定向点列，故必存在 α_0，使得

$$\alpha\geqslant\alpha_0\Longrightarrow x_{\alpha_0}-x_\alpha\in U.$$

因此 $\{x_{\alpha_0}-x_\alpha|\alpha\geqslant\alpha_0\}+U\subset U+U\subset V$。即知 $\tilde{x}_{\alpha_0}-\xi\in\tilde{V}$，$\tilde{x}_{\alpha_0}\in\xi+\tilde{V}$，所以 $(\xi+\tilde{V})\cap\varphi(R)\neq\emptyset$，$\varphi(R)$ 在 R_1 中稠密。

5) R_1 是完备的。设 $\{\xi_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$ 是 R_1 中的基本定向点列，由 $\varphi(R)$ 的稠密性，对于每个 $\tilde{V}\in\tilde{\mathscr{V}}$ 和 $\alpha\in\mathscr{A}$，存在 $x_{(\alpha,\tilde{V})}\in R$，使

$$\xi_\alpha-\tilde{x}_{(\alpha,\tilde{V})}\in\tilde{V}.$$

在 $\tilde{\mathscr{V}}$ 中规定序关系如下：

$$\tilde{V}_1\subset\tilde{V}_2\Longleftrightarrow\tilde{V}_2\leqslant\tilde{V}_1,$$

则 $\tilde{\mathscr{V}}$ 成为一个定向半序集。作定向点列 $\xi=\{x_{(\alpha,\tilde{V})}, (\alpha,\tilde{V})\in\mathscr{A}\times\tilde{\mathscr{V}}\}$。先证明 $\xi\in R_1$，事实上，对任一 $U\in\mathscr{V}$，存在 $W\in\mathscr{V}$，使 $W+W+W+W+W\subset U$。记 $U_1=W+W+W$、$U_2=U_1+W$。由于 $\{\xi_\alpha\}$ 是基本定向列，存在 $\alpha_0\in\mathscr{A}$，使当 α，$\alpha'\geqslant\alpha_0$ 时，$\xi_\alpha-\xi_{\alpha'}\in\tilde{W}$。又因 $\tilde{W}$ 是均衡的，故当 $(\alpha,\tilde{V})$、$(\alpha',\tilde{V}')\geqslant(\alpha_0,\tilde{W})$ 时，

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{(\alpha,\tilde{V})}-\tilde{x}_{(\alpha',\tilde{V}')}&=(\xi_\alpha-\xi_{\alpha'})+(\xi_{\alpha'}-\tilde{x}_{(\alpha',\tilde{V}')})\\&\quad+(\tilde{x}_{(\alpha,\tilde{V})}-\xi_\alpha)\in\tilde{W}+\tilde{W}+\tilde{W}\subset\tilde{U}_1.\end{aligned}$$

但是根据 3)，$\varphi(R)\tilde{U}_1=\varphi(U_1)$，所以 $x_{(\alpha,\tilde{V})}-x_{(\alpha',\tilde{V}')}\in U_1\subset U$，即

$\xi\in R_1$。

由于 $\alpha'\geqslant\alpha_0$ 时，$\{x_{(\alpha',\widetilde{W})}-x_{(\alpha,\widetilde{V})}\,|\,(\alpha,\widetilde{V})\geqslant(\alpha_0,\widetilde{W})\}+W\subset U_1+W=U_2$，所以 $\widetilde{x}_{(\alpha',\widetilde{W})}-\xi\in\widetilde{U}_2$，因而当 $\alpha'\geqslant\alpha_0$ 时，

$$\xi_{\alpha'}-\xi=\xi_{\alpha'}-\widetilde{x}_{(\alpha',\widetilde{W})}+\widetilde{x}_{(\alpha',\widetilde{W})}-\xi\in\widetilde{W}+\widetilde{U}_2\subset\widetilde{U}.$$

所以 ξ_α 收敛于 ξ，R_1 是完备的。

6）根据 1)～5)，线性拓扑空间 R 同构于完备线性拓扑空间 R_1 的稠密子空间 $\varphi(R)$。令 $\widetilde{R}=R_1$，即为所求。

7）唯一性证明：设 R 有两个完备化空间 $\widetilde{R}_1$、$\widetilde{R}_2$。$\widetilde{R}_1$ 的稠密子空间 R_1 同构于 R，$\widetilde{R}_2$ 的稠密子空间 R_2 同构于 R。设 R_1 到 R_2 的同构映照为 f，首先证明 f 能连续延拓为 $\widetilde{R}_1$ 上的连续线性映照。设 $x\in\widetilde{R}_1$，必存在 $x_\nu\in R_1$，使 $x_\nu\to x$。由于 f 是连续线性映照，可知 $f(x_\nu)$ 是 R_2 中的基本定向点列，因为 $\widetilde{R}_2$ 是完备的，$f(x_\nu)$ 在 $\widetilde{R}_2$ 中收敛，定义 $\widetilde{R}_1$ 到 $\widetilde{R}_2$ 的映照

$$\bar{f}(x)=\lim f(x_\nu).$$

这个定义是一意的。如果对于 x，另有 $x_\mu\to x$，则 $x_\mu-x_\nu\to 0$。由 f 的连续性可知

$$f(x_\mu)-f(x_\nu)=f(x_\mu-x_\nu)\to 0.$$

从而

$$\lim f(x_\mu)=\lim f(x_\nu).$$

容易知道 $\bar{f}(x)$ 是 $f(x)$ 的线性扩张。

下面证明 $\bar{f}$ 在 $\bar{R}_1$ 上是连续的：由于 $\bar{f}$ 在 R_1 上是连续的，对于 $\widetilde{R}_2$ 中 0 的任一闭环境 U，存在 $V\in\mathscr{N}(\widetilde{R}_1)$，使当 x_1、$x_2\in R_1$ 且 $x_1-x_2\in V$ 时，

$$f(x_1)-f(x_2)\in U.$$

对 V 取均衡环境 $W\in\mathscr{N}(\widetilde{R}_1)$ 使 $W+W+W\subset V$，则当 x_1、$x_2\in\widetilde{R}_1$ 且 $x_1-x_2\in W$ 时，$\bar{f}(x_1)-\bar{f}(x_2)\in U$。事实上，对于 x_1、x_2，可取 R_1 中的定向点列 x_μ、x_ν，使得 $x_\mu\to x_1$，$x_\nu\to x_2$。由此存在 μ_0、ν_0，使当 $\mu\geqslant\mu_0$ 时，有 $x_1-x_\mu\in W$；当 $\nu\geqslant\nu_0$ 时，有 $x_2-x_\nu\in W$。则当 $(\mu,\nu)\geqslant(\mu_0,\nu_0)$ 时，

$$x_\mu-x_\nu=x_\mu-x_1+x_1-x_2+x_2-x_\nu\subset W+W+W\subset V.$$

由 V 的取法知 $f(x_\mu)-f(x_\nu)\subset U$。又由于 U 是闭的，即推得

$$\bar{f}(x_1)-\bar{f}(x_2)=\lim(f(x_\mu)-f(x_\nu))\in U.$$

由此推得 $\bar{f}$ 在 $\tilde{R}_1$ 上是均匀连续的。同样可以证明 $f^{-1}=g$ 可以延拓为 $\tilde{R}_2$ 到 $\tilde{R}_1$ 的连续线性映照 $\bar{g}$。于是 $\bar{g}\cdot\bar{f}$ 是 $\tilde{R}_1$ 到 $\tilde{R}_1$ 的连续线性映照。由于 $\bar{g}\cdot\bar{f}$ 在 R_1 上的限制是恒等映照，以及 R_1 在 $\tilde{R}_1$ 中是稠密的，得知 $\bar{g}\cdot\bar{f}$ 在整个 $\tilde{R}_1$ 上是恒等映照。同样可以知道 $\bar{f}\cdot\bar{g}$ 是 $\tilde{R}_2$ 上的恒等映照。这就证明了 $\bar{f}$ 是 $\tilde{R}_1$ 到 $\tilde{R}_2$ 上的拓扑同构映照，$\tilde{R}_1$ 和 $\tilde{R}_2$ 同构，R 的完备化扩张 $\tilde{R}$ 在同构意义下是唯一确定的。证毕。

最后，可以从定理证明中看到，$\tilde{R}$ 是 R 的最小完备化扩张，也称为 R 的完备包。

下面的结论不难推得。设 $\tilde{R}$ 是 R 的完备包。$\mathscr{U}$ 是 R 中 0 的任意一组环境基。则 $\overline{\mathscr{U}}=\{\bar{U},U\in\mathscr{U}\}$，其中 $\bar{U}$ 是 U 在 $\tilde{R}$ 中的闭包，是 $\tilde{R}$ 中 0 的一组环境基。

证 按照本定理证明中的 2)，作 $\tilde{\mathscr{U}}=\{\tilde{U},U\in\mathscr{U}\}$，则 $\tilde{\mathscr{U}}$ 和 $\tilde{\mathscr{V}}$ 一样也是 $\tilde{R}$ 中 0 的一组环境基。由定义知道

$$\tilde{U}\subset\bar{U}\subset\tilde{\tilde{U}}.$$

即知 $\tilde{\mathscr{U}}$ 是 $\tilde{R}$ 中 0 的环境基。

注 这一结论还可以由第二章§1 的定理 3 的证明得到。

§6 商拓扑和拓扑积

我们已经知道在赋范空间中对于线性子空间可以作商空间，对于线性拓扑空间也可以建立类似的概念。

设 E 是线性拓扑空间，F 是 E 的线性子空间，在 E 中规定等价关系～如下：如果 $x-y\in F$，则称 $x\sim y$。容易知道这样定义的"～"是一个等价关系，换句话说，它满足下列三个条件：

(1) $x\sim x$（自反性）；

(2) $x\sim y\Longrightarrow y\sim x$（对称性）；

(3) $x\sim y$ 且 $y\sim z\Longrightarrow x\sim z$（传递性）。

我们把商集 $E/\sim$ 记为 E/F；把 $x\in E$ 所在的等价类记为 $\hat{x}$。在商集 E/F 中规定线性运算如下：

$$\hat{x}+\hat{y}=(\widehat{x+y});\quad a\hat{x}=(\widehat{ax})\quad (a\in K)。$$

容易知道，上述运算有确定的意义。E/F 按照这样规定的线性运算成为线性空间，称为 E 关于 F 的商空间。容易看到 E/F 中的零向量是 F。把 E 中的元 x 到相应等价类 $\hat{x}\in E/F$ 的映照记为

$$\theta:\ x\mapsto\hat{x}。$$

θ 称为商映照，也称为 E 到商空间 E/F 的典型映照。在 E/F 上定义一个使得 θ 为连续映照的最粗拓扑 $\mathscr{T}$，称为 E/F 上由 θ 决定的诱导拓扑。E/F 中的集 U 关于拓扑 $\mathscr{T}$ 是开集的充要条件为 $\theta^{-1}(U)$ 是 E 中的开集。关于闭集也有同样的命题成立。因为 E 是线性拓扑空间，可以知道 E 到 E/F 的典型映照 θ 是开的，即把 E 中的开集映成 E/F 中的开集。事实上，若 A 是 E 中的开集；则为了要证明 $\theta(A)$ 是 E/F 中的开集，只须证明 $\theta^{-1}(\theta(A))$ 是 E 中的开集。因为

$$\theta^{-1}(\theta(A))=A+F=\bigcup_{x\in F}(A+x),$$

它是开集之和，所以也是开的。由此可知一个集 U 是 E/F 中的开集的充要条件为 U 是 E 中的开集经 θ 映照的像。下面证明拓扑 $\mathscr{T}$ 是向量拓扑，并且称拓扑 $\mathscr{T}$ 为商拓扑。以后如不另作说明，在商空间 E/F 上总是赋予商拓扑 $\mathscr{T}$ 而成为一个线性拓扑空间。

定理 1 商空间 E/F 上的拓扑 $\mathscr{T}$ 是向量拓扑。

证 因为 E 是线性拓扑空间，取 $\mathscr{V}$ 为 E 中 0 点的由均衡环境组成的一个环境基。令集族

$$\mathscr{B}=\{\theta(U)\,|\,U\in\mathscr{V}\}。$$

则 E/F 中的集族 $\mathscr{B}$ 满足 §3 中的定理 1 所述的条件。事实上，如果 $\theta(U)$、$\theta(V)\in\mathscr{B}$，其中 U、$V\in\mathscr{V}$，因为 $\mathscr{V}$ 是线性拓扑空间的局部基，必存在 $W\in\mathscr{V}$，使 $W\subset U\cap V$，则 $\theta(W)\subset\theta(U)\cap\theta(V)$。考虑到如果 $V+V\subset U$，则 $\theta(V)+\theta(V)\subset\theta(U)$。条件(3)(4)也是容易验证的。从而，在 E/F 上可以唯一决定一个向量拓扑 $\mathscr{T}'$，它

以$\mathscr{B}$作为局部基。下面证明$\mathscr{T}'$就是商拓扑$\mathscr{T}$。

把θ看作E到$(E/F, \mathscr{T}')$的线性映照，取$V\in\mathscr{B}$，则存在$U\in\mathscr{V}$，使得$V=\theta(U)$，因为

$$\theta^{-1}(V)=\theta^{-1}(\theta(U))=U+F\supset U.$$

所以θ是E到$(E/F, \mathscr{T}')$的连续映照，但是因为$\mathscr{T}$是使θ为连续的E/F上的最强拓扑，所以$\mathscr{T}'\subset\mathscr{T}$。

另一方面，由于对于每个$V\in\mathscr{V}$，$\theta(V)\in\mathscr{B}$，也就是说，θ把E中0的每个环境映成$(E/F,\mathscr{T}')$中0的环境，所以θ一定把开集映为开集，即是一个开映照。则由下面的定理就可知道，$(E/F, \mathscr{T})$到$(E/F, \mathscr{T}')$的恒等映照是开映照，由此$\mathscr{T}\subset\mathscr{T}'$，即得$\mathscr{T}=\mathscr{T}'$。定理证毕。

注　由上面定理的证明过程可以看出，E/F上的商拓扑是使得θ既是连续映照同时又是开映照的唯一拓扑。

定理 2　设E是线性拓扑空间，F是E的线性子空间，E/F是商线性拓扑空间，θ是商映照。S是E/F到拓扑空间G的映照，则S是连续的（或开的）充要条件是：$S\cdot\theta$是E到G的连续(或开的)映照。

证　设S是E/F到G的连续映照，这一事实等价于对于G中的每一个开集W，其逆像$S^{-1}(W)$是E/F中的开集。充要条件是$\theta^{-1}\cdot S^{-1}(w)=(S\cdot\theta)^{-1}(w)$是$E$中的开集。由此，$S$是连续映照的充要条件是：$S\cdot\theta$是$E$到$G$的连续映照。关于开映照的相应结论同样可以得到。

注 1　设E是分离的线性拓扑空间，F是E的线性子空间，E/F上的商拓扑一般不能断言是分离的。但是有下述结论：E/F是分离的充要条件是：F是E的闭子空间。事实上，如果商拓扑空间E/F是分离的，则零类$\{0\}=\cap\{V|V\in\mathscr{B}\}$等价于$F=\cap\{F+W|W\in\mathscr{V}\}$，根据§2中的基本运算性质$(f)$知道：$\overline{F}=\cap\{F+W|W\in\mathscr{V}\}$，所以$F=\overline{F}$，就是说$E/F$是分离的充要条件为$F$是闭的。

注 2　设E是线性拓扑空间，令$F=\{0\}^{-}$，则F是E的闭线性子空间。令G是F的代数补线性子空间，如果在F上取平凡拓扑，

G 上取 E 的相对拓扑(即 E 上拓扑在 G 上的限制)，则 E 拓扑同构于 $G\times F$，其中 G 是分离的线性拓扑空间，$E/F\cong G$，G 称为 E 的豪斯道夫(Hausdorff)商线性拓扑空间。

基于上面的讨论，还可以把商拓扑的定义写得更一般一点。设 X 是线性拓扑空间，Y 是一个线性空间，f 是 X 到 Y 上的线性映照，在 Y 上定义一个使得 f 为连续映照的最精向量拓扑，称为 Y 上的**商拓扑**，记为 Qf。同定理 1 的证明一样，可以知道 Y 上由 f 决定的诱导拓扑是一个向量拓扑，也就是 Y 上的商拓扑，f 称为 $X\to(Y, Qf)$ 的商映照。可以知道，f 是连续的又是开的映照。如果 f 是一一映照，则 f 是 X 和 (Y, Qf) 间的拓扑同胚映照，所以商映照可以看作拓扑同胚映照的推广，是 $X\to(Y, Qf)$ 间的开同态。如果记 $F=\{x\in X \mid f(x)=0\}$，容易知道 X/F 和 (Y, Qf) 是同构的。如同定理 1 的注所指出的：Y 上的商拓扑是使 f 既是连续又是开的映照的唯一拓扑。商映照可以看作连续、开的线性映照。

定理 3　设 X、Y 是 Frechet 空间，则每一个从 X 到 Y 上的连续线性映照 f 是商映照。

证　由开映照定理即可知。

定理 4　赋准范空间的商拓扑空间是赋准范空间。

证　设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋准范空间，f 是 X 到线性空间 Y 上的线性映照。对于每个 $y\in Y$，令

$$\|y\|'=\inf\{\|x\| \mid y=f(x)\}.$$

下面先验证 $\|\cdot\|'$ 是 Y 上的赋准范。首先，很容易知道 $\|y\|'\geqslant 0$；$\|0\|'=0$ 以及 $\|-y\|'=\|y\|'$。其次有 $\|y+z\|'\leqslant\|y\|'+\|z\|'$。事实上，对于任一 $\varepsilon>0$，取 u、$v\in X$，使 $y=f(u)$，$z=f(v)$，且满足

$$\|u\|<\|y\|'+\varepsilon,\quad \|v\|<\|z\|'+\varepsilon.$$

则由　$y+z=f(u+v)$　知：

$$\|y+z\|'\leqslant\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|<\|y\|'+\|z\|'+2\varepsilon.$$

由 ε 的随意性知，

$$\|y+z\|'\leqslant\|y\|'+\|z\|'.$$

还要验证：设 $t_n \to t$ 及 $\|y_n - y\|' \to 0$。由已验证的结论得

$$\|t_n y_n - ty\|' \leqslant \|t_n(y_n - y)\|' + \|(t_n - t)y\|'.$$

取 $u \in X$，使 $y = f(u)$，则

$$\|(t_n - t)y\|' \leqslant \|(t_n - t)u\| \to 0.$$

另外，取 $u_n \in X$，使 $y_n - y = f(u_n)$，并且

$$\|u_n\| \leqslant \|y_n - y\|' + \frac{1}{n}.$$

则 $\|u_n\| \to 0$。由赋准范空间是线性拓扑空间。而 t_n 是有界集，所以 $\|t_n u_n\| \to 0$。由此

$$\|t_n(y_n - y)\|' \leqslant \|t_n u_n\| \to 0.$$

即知 $\|t_n y_n - ty\|' \to 0$。从而 $\|\cdot\|'$ 是 Y 上的赋准范。

下面还要证明 Y 上由 $\|\cdot\|'$ 导出的拓扑即是商拓扑，这只须验证 $f: X \to (Y, \|\cdot\|')$ 是开的连续映照。

设在 X 中 $x_n \to x$，则由定义

$$\|f(x_n) - f(x)\|' = \|f(x_n - x)\|' \leqslant \|x_n - x\| \to 0.$$

所以 f 是连续的。下面再证明 f 是开的。令 G 是 X 中任一开集，在 $f(G) = \{f(x), x \in G\}$ 中任取一点 $b = f(a)$，$a \in G$。因 G 是开集，存在 $\varepsilon > 0$，使得 $O(a, \varepsilon) \subset G$，其中 $O(a, \varepsilon) = \{x \mid \|x - a\| < \varepsilon\}$。下面证明 $O\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \{y \in Y \mid \|y - b\|' < \frac{\varepsilon}{2}\} \subset f(G)$，即知道 $f(G)$ 是开集，f 是开映照。事实上，如果 $y \in O\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right)$，可取 $w \in X$，使 $y - b = f(w)$，并且

$$\|w\| < \|y - b\|' + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad w + a \in O(a, \varepsilon) \subset G,$$

$$y = f(w + a) \in f(G). \quad \text{证毕。}$$

类似地，可以证明

定理 5　赋拟范空间的商空间是赋拟范空间。

我们必须注意这样的事实：完备线性拓扑空间的商空间不一定是完备的。但是对于完备的赋准范空间，它的商空间一定也是完备的。还可以证明完备线性拓扑空间 E 的豪斯道夫商 $E/\{0\}^-$ 一定

是完备的。事实上，根据注 2，$E/\{0\}^- \cong G$。如果 E 是完备的，由 $E \cong \{0\}^- \times G$ 知道 G 是完备的。

定理 6 完备赋准范空间的商空间是完备的。

证 设在定理 4 中 $(X, \|\cdot\|)$ 是完备的赋准范空间，$(Y, \|\cdot\|')$ 是由 f 导出的商空间。设 $\{y_n\}$ 是 Y 中的一个基本序列，用归纳法选取一列自然数 N_k，满足 $N_{k+1} > N_k (k=1, 2, \cdots)$，使当 m、$n \geq N_{k+1}$ 时，

$$\|y_m - y_n\|' < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

令 $z_0 = y_{N_1}$，$z_1 = y_{N_2} - y_{N_1}$，$\cdots$，$z_k = y_{N_{k+1}} - y_{N_k}$，$\cdots$，则 $\|z_k\|' < \frac{1}{2^k}$，对每个 $z_k \in Y$，选取 $x_k \in X$，使得

$$f(x_k) = z_k, \text{并且} \|x_k\| < \|z_k\|' + \frac{1}{2^k},$$

则 $\|x_k\| < \frac{1}{2^{k-1}}$。根据这个部分和序列 $\sum_{i=0}^{n} x_i$ 是 X 中的基本点列及由 X 是完备的，存在 $x \in X$，使得 $\sum_{i=0}^{n} x_i \to x$，则由 f 的连续性，有

$$y_{N_{k+1}} = \sum_{i=0}^{k} z_i = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) = f\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) \to f(x).$$

也就是说，y_n 有一个子序列 y_{n_k} 收敛。易知 y_n 也收敛到同一点 $f(x)$。从而 $(Y, \|\cdot\|')$ 是完备的。证毕。

分离的完备赋准范空间称为 Frechet 空间。关于这种空间有下述的系：

系 Frechet 空间关于闭子空间的商空间是 Frechet 空间。

还应注意：线性拓扑空间 E 的子空间可以不是 E 的商拓扑空间，但是如果 A 是 E 的可补的子空间，即存在一个拓扑补子空间 B，使得 $E = A \oplus B$。这时 A 同构于 E/B，也就是说 A 是 E 的商空间。

除了商拓扑外，如果给定了一族线性拓扑空间，还可以构造拓扑积，也称为**乘积空间**。

设 $(R_\alpha, T_\alpha)(\alpha \in A)$ 是一族线性拓扑空间，$R = \prod_{\alpha \in A} R_\alpha$ 是 A 上如

下形状的函数全体：

$$x(\alpha)=x_\alpha\in R_\alpha\quad(\alpha\in A)。$$

也可以记作 $x=(x_\alpha)$。R 按通常运算成为线性空间。如果在 R 上赋以如下拓扑：R 中任一点 x 的环境基是由如下集合全体组成：

$$U=\prod_{\alpha\in A}W_\alpha,$$

其中除了有限个足标 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 外，$W_\alpha=R_\alpha$，而 $W_{\alpha_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 分别是 R_{α_i} 中 x_{α_i} 的环境。容易验证这定义了一个拓扑。R 上赋以这样的拓扑称为 (R_α,T_α) $(\alpha\in A)$ 的拓扑积。如果 $R_\alpha=S$ $(\alpha\in A)$，则 R_α 的拓扑积可以记为 $S^A=\prod\limits_{\alpha\in A}R_\alpha$。

R 到 R_α 上的映照 P_α：$x\mapsto x_\alpha$ 称为典型投影映照。容易直接验证：R 上的乘积拓扑是 R 上使得每一个 P_α $(\alpha\in A)$ 都连续的最粗拓扑。且容易验证如下性质：

(1) 任意个线性拓扑空间的拓扑积是一个线性拓扑空间；

(2) 设 $R_\alpha(\alpha\in A)$ 是一族线性拓扑空间，$R=\prod\limits_{\alpha\in A}R_\alpha$。则 R 的完备包 $\tilde{R}$ 是 R_α 的完备化空间 $\tilde{R}_\alpha$ 的拓扑积：

$$\tilde{R}=\prod_{\alpha\in A}\tilde{R}_\alpha.$$

证　$\{x^{(\nu)}\}$ 是 R 中的基本定向点列的充要条件是 $\{x_\alpha^{(\nu)}\}$ $(\alpha\in A)$ 是 R_α 中的基本定向点列。所以 $\prod\limits_{\alpha\in A}\tilde{R}_\alpha$ 是完备的线性拓扑空间。容易证明 $R=\Pi R_\alpha$ 在 $\Pi\tilde{R}_\alpha$ 中是稠密的。由完备化空间的唯一性即知 $\tilde{R}\cong\Pi\tilde{R}_\alpha$。　证毕。

§7　连续线性泛函



在泛函分析中，赋范空间上可以定义足够多的连续线性泛函。但是对于一般的线性拓扑空间，在第二章中将给出例子，可以不存在任何非 0 的连续线性泛函。本节中的讨论将不涉及连续线性泛函的存在性，而只指出它的一般性质。

设 E 是线性拓扑空间，f 是 E 上的线性泛函，由线性容易知

道，f 是连续的充要条件是 f 在 0 点连续。同时，连续线性泛函必一致收敛。就是说对于每个 $\varepsilon>0$，必存在 E 中 0 的环境，使当 x、$y\in E$，且 $x-y\in U$ 时，

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

因此，对于线性拓扑空间上的连续线性泛函有重要的延拓性质。

定理 1 设 f 是线性拓扑空间 E 上的连续线性泛函，E 的完备化空间为 $\tilde{E}$，则 f 可以唯一地延拓为 $\tilde{E}$ 上的连续线性泛函 $\tilde{f}$。

证 设 $x\in\tilde{E}$，则存在 E 中的点列 $x_\nu\to x$，x_ν 是 E 中的基本定向点列。因为 f 是 E 上的连续线性泛函，所以必一致连续。对于每一个 $\varepsilon>0$，必存在 E 中 0 的环境 U，使得

$$x、y\in E,\ 且\ x-y\in U\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

由于 x_ν 是基本定向点列，必存在 ν_0，使得

$$\nu、\nu'\geqslant\nu_0\Longrightarrow x_\nu-x_{\nu'}\in U.$$

所以当 ν、$\nu'\geqslant\nu_0$ 时，$|f(x_\nu)-f(x_{\nu'})|<\varepsilon$，这说明 $f(x_\nu)$ 是基本的，所以必存在极限，令

$$\tilde{f}(x)=\lim f(x_\nu).$$

这样的定义是唯一确定的。事实上，如果另有 $x_\mu\in E$，$x_\mu\to x$，则 $x_\mu-x_\nu\to 0$，由连续性得到

$$f(x_\mu)-f(x_\nu)=f(x_\mu-x_\nu)\to 0,$$

所以

$$\lim f(x_\mu)=\lim f(x_\nu).$$

说明 $\tilde{f}(x)$ 的定义是确定的。容易知道，$\tilde{f}$ 是 $\tilde{E}$ 上的线性泛函，并且是 f 的延拓，即 $x\in E$ 时，$\tilde{f}(x)=f(x)$。

下面证明 $\tilde{f}$ 在 $\tilde{E}$ 上的连续性，任意给定 $\varepsilon>0$，由于 $\tilde{f}$ 在 E 上的限制，即 f 是连续的，必存在 $\tilde{E}$ 中 0 的环境 $\tilde{U}$，使得当 x、$y\in E$，且 $x-y\in\tilde{U}$ 时，$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$。对于 $\tilde{U}$，取 $\tilde{E}$ 中 0 的均衡环境 $\tilde{V}$，使得

$$\tilde{V}+\tilde{V}+\tilde{V}\subset\tilde{U}.$$

则当

$$x_1、x_2\in\tilde{E},\ x_1-x_2\in\tilde{V}时，|\tilde{f}(x_1)-\tilde{f}(x_2)|<\varepsilon.$$

事实上，对 x_1、x_2，取 x_μ、$x_\nu\in E$，使得 $x_\mu\to x_1$，$x_\nu\to x_2$，必存在 μ_0、

ν_0，使

$$\mu \geqslant \mu_0 \Longrightarrow x_\mu - x_1 \in \tilde{V}; \quad \nu \geqslant \nu_0 \Longrightarrow x_\nu - x_2 \in \tilde{V}.$$

则当$(\mu, \nu) \geqslant (\mu_0, \nu_0)$时，

$$x_\mu - x_\nu = x_\mu - x_1 + x_1 - x_2 + x_2 - x_\nu \subset \tilde{V} + \tilde{V} + \tilde{V} \subset \tilde{U}.$$

从而
$$|f(x_\mu) - f(x_\nu)| < \varepsilon,$$

对上式取极限，得

$$|\tilde{f}(x_1) - \tilde{f}(x_2)| = \lim |f(x_\mu) - f(x_\nu)| \leqslant \varepsilon.$$

即$\tilde{f}(x)$在$\tilde{E}$上一致连续。证毕。

注　从定理1的证明中可以看出：对于连续线性映照也有类似的延拓性质。设T是线性拓扑空间X到线性拓扑空间Y的连续线性映照，则T必可延拓为$\tilde{X}$到$\tilde{Y}$的连续线性映照，其中$\tilde{X}$、$\tilde{Y}$分别是X、Y的完备化。

下面的定理给出了线性泛函连续的一些等价条件：

定理2　设f是线性拓扑空间E上的不恒为0的线性泛函，则下列条件均是等价的：

(a)　f是连续的；

(b)　f的0空间$N(f) = \{x \mid f(x) = 0\}$是闭的；

(c)　$N(f)$在E中不是稠密的；

(d)　f在E中0的某一个环境上有界；

(e)　在E中存在某非空开集U，使得$f(U)$是数域K中的真子集；

(f)　$f(x)$的实部$\mathrm{Re}f(x)$是连续的。

证　(a)$\Longrightarrow$(b)：如果f是连续的，因为$\{0\}$是数域中的闭集，而$N(f) = f^{-1}(0)$，由连续函数的基本性质，$N(f)$是闭的。

(b)$\Longrightarrow$(c)：用反证法证明：如果$N(f)$在E中是稠密的，则根据(b)，$N(f) = E$。这样将有$f \equiv 0$，这和假设矛盾。

(c)$\Longrightarrow$(d)：因为$N(f)$不在E中稠密，则必存在点x和0的某均衡环境U，使得$x+U$与$N(f)$不交。那末可以证明$f(U)$是有界的。事实上，如果$f(U)$无界，因为U是均衡吸收的，故$f(U)$必须是整个数域K，于是必可取到一点$u \in U$，使$f(u) = -f(x)$。这

样，$f(u+x)=f(u)+f(x)=0$，但根据U的选取，$f(u+x)\neq 0$，产生矛盾。

$(d)\Longrightarrow(a)$：如果f在0的某环境U上有界，设当$x\in U$时，$|f(x)|\leqslant M$。对任一$\varepsilon>0$，当$x\in\frac{\varepsilon}{M}U\in\mathcal{N}$时，$|f(x)|\leqslant\varepsilon$。即$f(x)$在0点连续，从而是连续的。

$(d)\Longrightarrow(e)$是明显的。

$(e)\Longrightarrow(c)$：设U是开集，$f(U)$是数域中的真子集S，取$a\overline{\in}S$，则$f^{-1}(a)\cap U=\varnothing$，即$f^{-1}(a)$在$E$中不是稠密的。根据$f$是不恒为0的线性泛函，可以取到$x_0$，使$f(x_0)=a$，从而

$$f^{-1}(a)-x_0=f^{-1}(0)。$$

由于在线性拓扑空间中，平移是拓扑同胚映照，由此可知：$f^{-1}(0)$也不是在E中稠密的。

$(f)\Longleftrightarrow(a)$：如果令$r(x)=Ref(x)$，则容易验证

$$f(x)=r(x)-ir(ix)。$$

这样，$f(x)$的连续性与$r(x)$的连续性是等价的。

系 线性拓扑空间中的超平面，如不是闭的，则必定是在线性拓扑空间中稠密的。

这可以由定理中的$(b)\Longleftrightarrow(c)$推得。

§8 线性距离空间

定义 设E是线性空间，又是距离空间，ρ是E上的距离，并且E按ρ导出的拓扑成为线性拓扑空间，则称E是线性距离空间。

因为距离空间满足第一可列公理和T_0分离公理，所以线性距离空间也是满足第一可列公理和T_0公理的。在后面的定理2中，将要证明这也是线性拓扑空间是线性距离空间的拓扑特征。

定理1 设E是线性空间，又是距离空间，ρ是E上的距离，则(E,ρ)是线性距离空间的充要条件为：

(i) 当$\{x_n\}$、$\{y_n\}\subset E$，x_0、$y_0\in E$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0$及$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(y_n,y_0)=0$时，必定有

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n+y_n,\ x_0+y_0)=0.$$

(ii) a) 当$x\in E$，数列$\lambda_n\to 0$时，

$$\lim_{n\to\infty}\rho(\lambda_n x,\ 0)=0.$$

b) 当数列$\{\lambda_n\}$有界，而且$\{x_n\}\subset E$，$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,\ 0)=0$时，

$$\lim_{n\to\infty}\rho(\lambda_n x_n,\ 0)=0.$$

证　条件的必要性可以从线性拓扑空间的定义得知，今以(i)为例来证明：设x_n、y_n、x_0、$y_0\in E$，$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,\ x_0)=0$；$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(y_n,\ y_0)=0$。根据§1中的式(1)，对于$x_0+y_0$的环境

$$U=\{z,\ \rho(z,\ x_0+y_0)<\varepsilon\},$$

必有x_0的环境U_{x_0}以及y_0的环境U_{y_0}，使

$$U_{x_0}+U_{y_0}\subset U.$$

因为$x_n\to x_0$，$y_n\to y_0$，故必存在自然数N，使当$n>N$时，

$$x_n\in U_{x_0},\ y_n\in U_{y_0}.$$

所以当$n>N$时，$x_n+y_n\in U$，即$\rho(x_n+y_n,\ x_0+y_0)<\varepsilon$。

从而
$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n+y_n,\ x_0+y_0)=0.$$

充分性：由(i)可以推出加法的连续性，由(i)、(ii)可以推出数乘的连续性。今以后者为例来详细推导：

设数$\lambda_n\to\lambda_0$；E中的元$x_n\to x_0$，即$\rho(x_n,\ x_0)\to 0$，由(i)知

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n-x_0,\ 0)=0.\tag{1}$$

由(ii) b)：
$$\lim_{n\to\infty}\rho(\lambda_n(x_n-x_0),\ 0)=0.\tag{2}$$

再由(ii) a)知$\lim\limits_{n\to\infty}\rho((\lambda_n-\lambda_0)x_0,\ 0)=0$。

由(i)知道
$$\lim_{n\to\infty}\rho(\lambda_n x_n-\lambda_0 x_0,\ 0)=0.$$

再由(i)即得
$$\lim_{n\to\infty}\rho(\lambda_n x_n,\ \lambda_0 x_0)=0.$$

如果数乘是不连续的，则必有数λ_0和$x_0\in E$以及$\lambda_0 x_0$的环

境 U，存在 λ_n、x_n，使对一切的 n，

$$|\lambda_n-\lambda_0|<\frac{1}{n},\quad \rho(x_n, x_0)<\frac{1}{n},$$

但是 $\lambda_n x_n \overline{\in} U$。这时 $\lambda_n \to \lambda_0$，$x_n \to x_0$，由上面的证明知应有

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\lambda_n x_n, \lambda_0 x_0)=0,$$

这与 $\lambda_n x_n \overline{\in} U$ 矛盾，所以数乘是连续的。证毕。

定义 设 ρ 是线性空间 E 上的一个距离，如果对于一切 x、$y\in E$，满足下述等式：

$$\rho(x-y, 0)=\rho(x, y). \tag{3}$$

则称 ρ 是不变距离。

如果对于一切数 $|t|\leqslant 1$，都有

$$\rho(tx, 0)\leqslant\rho(x, 0). \tag{4}$$

就称 ρ 是均衡的。由上式易知当 $|t|=1$ 时，$\rho(tx, 0)=\rho(x, 0)$。

设 E 是线性空间，又是距离空间，ρ 是 E 上的距离，容易验证，ρ 是 E 上均衡不变距离的充要条件为：在 E 上存在泛函 $N(x)$，适合

(i) $N(x)\geqslant 0$，且 $N(x)=0 \Longleftrightarrow x=0$； (5)

(ii) $N(x+y)\leqslant N(x)+N(y)$； (6)

(iii) 当 $|t|\leqslant 1$ 时，$N(tx)\leqslant N(x)$。 (7)

使得 $\rho(x, 0)=N(x)$。

系 设 E 是线性空间，又是距离空间，且 E 上的距离是均衡不变的，则 E 是线性距离空间的充要条件为：对于每个 $x\in E$，当 $\lambda_n\to 0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\lambda_n x, 0)=0. \tag{8}$$

证 必要性是显然的。

充分性：若 ρ 满足系中所设的条件，由定理 1，只要验证其中的条件(i)、(ii)b)即可。

设 x_n、x_0、y_n、$y_0\in E$，$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, x_0)=0$；$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(y_n, y_0)=0$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n+y_n, x_0+y_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho((x_n-x_0)+(y_n-y_0), 0)$

$$\leqslant \lim \rho(x_n - x_0,\ 0) + \lim \rho(y_n - y_0,\ 0)$$

$$= \lim \rho(x_n,\ x_0) + \lim \rho(y_n,\ y_0).$$

即(i)成立。其次证(ii)b)，根据 ρ 是不变距离，容易知道，对任何自然数 k，有

$$\rho(kx,\ 0) \leqslant k\rho(x,\ 0).$$

当数列$\{\lambda_n\}$有界时，不妨设对某自然数 k，有 $|\lambda_n| < k$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，则由 ρ 是均衡不变的，从而有

$$\rho(\lambda_n x_n,\ 0) \leqslant k\rho\left(\frac{\lambda_n}{k} x_n,\ 0\right) \leqslant k\rho(x_n,\ 0).$$

由此即可得到(ii)b)，证毕。

定理 2　设 E 是线性拓扑空间，而且满足 T_0 公理和第一可列公理，则在 E 上一定存在一个均衡不变距离 ρ，使 E 上的拓扑为由 ρ 导出的。

证　1) 设 $\{V_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$是 E 中 0 的一组环境基。由 §2 中的定理 2，必存在 0 的均衡环境 U_1，适合 $U_1 \subset V_1$。又由 §2 中的性质(III)，存在 0 的均衡环境 U_2，使 $U_2 + U_2 \subset U_1 \cap V_2$。同样可选取 0 的均衡环境 U_3，使得 $U_3 + U_3 \subset U_2 \cap V_3$，…，这样继续下去，就得到 0 的一列均衡环境$\{U_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$适合

$$U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n \quad (n \geqslant 1). \tag{9}$$

并且 $U_{n+1} \subset V_{n+1}$，所以$\{U_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ 也组成 0 的环境基。由于 E 满足 T_0 公理，根据 §2 中的定理 1 可知，E 必满足 T_1 公理，对 E 中任一 $x \neq 0$，必存在 $V \in \mathscr{N}$，使 $x \overline{\in} V$，所以必有某 U_n，使 $x \overline{\in} U_n$，故

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}. \tag{10}$$

再作 0 的均衡环境 U_n $(n=0,\ -1,\ -2,\ \cdots)$，使 $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$对一切 n 成立，例如可以取 $U_n = U_{n+1} + U_{n+1}$ $(n \leqslant 0)$。

2) 令$\mathscr{R}$为形如

$$r = \sum_{k=-m}^{n} \varepsilon_k \frac{1}{2^k},\ \varepsilon_k = 0 \text{ 或 } 1 \tag{11}$$

的正数全体，对每个形如(11)的数 r，作集

$$U(r)=\varepsilon_n U_n+\varepsilon_{n-1}U_{n-1}+\cdots+\varepsilon_{-m}U_{-m},$$

则

(i) 当 $|\lambda|\leqslant 1$、$r\in\mathfrak{R}$时，$\lambda U(r)\subset U(r)$；

(ii) 当 r_1、$r_2\in\mathfrak{R}$时，$U(r_1)+U(r_2)\subset U(r_1+r_2)$；

(iii) 当 r_1、$r_2\in\mathfrak{R}$，$r^1<r_2$ 时，$U(r_1)\subset U(r_2)$；

(iv) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}U_{-k}=E$。

事实上，(i)由 U_n 的均衡性可得知。

(ii) 证：由于(9)式对一切 n 成立，所以

$$\varepsilon_k U\left(\frac{1}{2^k}\right)+\varepsilon_k' U\left(\frac{1}{2^k}\right)\subset U\left(\varepsilon_k\frac{1}{2^k}+\varepsilon_k'\frac{1}{2^k}\right)$$

$$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots),\qquad (12)$$

反复应用(12)，即可知道，$r_1=\sum\limits_{k=-m}^{n}\varepsilon_k\frac{1}{2^k}$，$r_2=\sum\limits_{k=-m}^{n}\varepsilon_k'\frac{1}{2^k}$ 时，

$$U(r_1)+U(r_2)=\sum_{k=-m}^{n}\left(\varepsilon_k U\left(\frac{1}{2^k}\right)+\varepsilon_k' U\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)$$

$$\subset\sum_{k=-m}^{n}U\left(\varepsilon_k\frac{1}{2^k}+\varepsilon_k'\frac{1}{2^k}\right)$$

$$\subset U(r_1+r_2).$$

(iii) 证：当 r_1、$r_2\in\mathfrak{R}$，$r_1<r_2$ 时，由(ii)，得

$$U(r_1)+U(r_2-r_1)\subset U(r_2).$$

因此
$$U(r_1)\subset U(r_2).$$

(iv) 证：由(9)式对一切 n 成立，可知

$$2^nU_1\subset 2^{n-1}U_0\subset 2^{n-2}U_1\subset\cdots\subset U_{-n+1}.$$

由于 0 的环境 U_1 是吸收的，所以对于任何 $x\in E$，必存在 $\delta>0$，使当 $|\lambda|\leqslant\delta$ 时，$\lambda x\in U_1$。取 n 充分大，使 $2^{-n}\leqslant\delta$，则 $2^{-n}x\in U_1$，即知

$$x\in 2^nU_1\subset U_{-n+1}.$$

3) 由(iv)，对每个 $x\in E$，必有 $r\in\mathfrak{R}$，使 $x\in U(r)$，因此可作 E 上的函数 $N(x)$ 如下：

$$N(x)=\inf\{r\mid x\in U(r),\ r\in\mathfrak{R}\},$$

则有 (v) $N(x)\geqslant 0$，而 $N(x)=0\Longleftrightarrow x=0$；

(vi) 当 $|t|\leqslant 1$ 时，$N(tx)\leqslant N(x)$；

(vii) $N(x_1+x_2)\leqslant N(x_1)+N(x_2)$。

事实上，$N(x)\geqslant 0$ 是显然的。因对任何 $r\in\mathfrak{R}$ 总有 $0\in U(r)$，所以 $N(0)=0$。反之，若 $N(x)=0$，则对任何自然数 k，必有 r，使 $r<\frac{1}{2^k}$，并且 $x\in U(r)$，由(iii)知道，$x\in U\left(\frac{1}{2^k}\right)=U_k$，由(10)得 $x=0$。即得(v)。

(vi) 由(i)可直接推出。

(vii) 证：设 x_1、$x_2\in E$，对任何正数 ε，必有 $r_k\in\mathfrak{R}$，使

$$r_k<N(x_k)+\varepsilon,\ 且\ x_k\in U(r_k)\quad(k=1,2)。$$

因此，根据(ii)，$x_1+x_2\in U(r_1)+U(r_2)\subset U(r_1+r_2)$，即知

$$N(x_1+x_2)\leqslant r_1+r_2<N(x_1)+N(x_2)+2\varepsilon。$$

令 $\varepsilon\to 0$，即得(vii)。

由(v)、(vi)、(vii)可知道，如令 $\rho(x,y)=N(x-y)$，则 ρ 是 E 上的均衡不变距离。

4) 再证明 E 中的拓扑是由 ρ 导出的，为此记

$$O(x_0,\varepsilon)=\{x\,|\,N(x-x_0)<\varepsilon\},$$

先证明 (viii)：$O\left(0,\frac{1}{2^k}\right)\subset U_k\subset O\left(0,\frac{1}{2^{k-1}}\right)(k=1,2,\cdots)$。

事实上，当 $x\in U_k$ 时，$N(x)\leqslant\frac{1}{2^k}$，因此 $x\in O\left(0,\frac{1}{2^{k-1}}\right)$。反之，如 $x\in O\left(0,\frac{1}{2^k}\right)$，则 $N(x)<\frac{1}{2^k}$。所以有 $r\in\mathfrak{R}$，$r<\frac{1}{2^k}$，使 $x\in U(r)$。再由(iii)知，$x\in U\left(\frac{1}{2^k}\right)=U_k$，即证得(viii)。

下面证明 $O(0,\varepsilon)$ 按照 E 中的拓扑是开集：事实上，如果 $x_0\in O(0,\varepsilon)$，选取 k，使 $\frac{1}{2^{k-1}}<\varepsilon-\rho(x_0,0)$，则由(viii)，可推知

$$x_0+U_k\subset x_0+O\left(0,\frac{1}{2^{k-1}}\right)\subset O(0,\varepsilon)。$$

因此 $O(0,\varepsilon)$ 是 E 中的开集。对任何 $y\in E$，$O(y,\varepsilon)=y+O(0,\varepsilon)$ 也是 E 中的开集，所以由 ρ 导出的拓扑比 E 的拓扑弱。

反之，设 V 是 E 中的开集，任取 $x_0\in V$，因为 $\{x_0+U_k,\ k=1,$

2, …}是 x_0 点的环境基，必存在 k，使 $x_0+U_k\subset V$，由(viii)，有

$$O\left(x_0, \frac{1}{2^k}\right)=x_0+O\left(0, \frac{1}{2^k}\right)\subset x_0+U_k\subset V.$$

所以 V 按 ρ 导出的拓扑也是开集，即由 ρ 导出的拓扑比 E 的拓扑强，所以这两个拓扑是一致的。证毕。

例 1 设 $\mathfrak{S}$ 是 $[0, 1]$ 上的全体可测函数（几乎处处相等的两个函数看作同一个元素），按照通常的线性运算，$\mathfrak{S}$ 成为一个线性空间。在 $\mathfrak{S}$ 上定义距离 $\rho(x, y)$ 如下：

$$\rho(x, y)=\int_0^1 \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}dt.$$

则显然 ρ 是 $\mathfrak{S}$ 上的均衡不变距离。由验证定理 1 的系中的条件即可知道 $\mathfrak{S}$ 按 ρ 成为线性距离空间。

定理 3 设 E 是线性距离空间，其上的距离 ρ 是平移不变的。如果 A 是 E 中的有界集，那末必有正数 C 使得对一切的 $x\in A$，有 $\rho(x, 0)\leqslant C$。

证 作 E 中 0 的环境 $V=\{x|\rho(x, 0)\leqslant 1\}$，由于 A 是有界集，A 被 V 吸收，必有正数 δ，使得当 $|\lambda|\leqslant\delta$ 时，

$$\lambda A\subset V.$$

取自然数 $k>\frac{1}{\delta}$，则当 $x\in A$ 时，$\frac{1}{k}x\in\frac{1}{k}A\subset V$，即 $\rho\left(\frac{x}{k}, 0\right)\leqslant 1$。但是由于 ρ 是不变距离，$\rho(ky, 0)\leqslant k\rho(y, 0)$，所以当 $x\in A$ 时，

$$\rho(x, 0)\leqslant k\rho\left(\frac{x}{k}, 0\right)\leqslant k. \qquad \text{证毕。}$$

但是一般来说，定理 3 的逆命题不一定对。即如果 $A\subset E$，而且 $\sup\limits_{x\in A}\rho(x, 0)<\infty$ 时，A 不一定是有界集。例如在例 1 中，对全空间 $\mathfrak{S}$，$\sup\limits_{x\in\mathfrak{S}}\rho(x, 0)=1$。但是 $\mathfrak{S}$ 显然不是 $\mathfrak{S}$ 中的有界集。事实上，对于任何线性拓扑空间，只要不是仅由 $\{0\}$ 一点构成的，全空间就不会是有界集。否则，对于任一点 $x\in E$，因为 $x=\frac{1}{n}nx\to 0$，将得出 E 中的每一点 $x=0$。这和假设不符合。

由定理 2 可知道，每一个满足第一可列公理且分离的线性拓

扑空间E必定可以距离化，即其上的拓扑可以由一个均衡不变距离ρ给出，令

$$N(x)=\rho(x,\ 0),$$

则$N(x)$是一个分离的赋准范。所以在讨论满足第一可列公理且分离的线性拓扑空间或者线性距离空间时，可以把它看作一个分离的赋准范空间而不丧失一般性。由于$N(x)$在E上的一致连续性，可以把$N(x)$连续延拓到E的完备化空间$\tilde{E}$上而看作$\tilde{E}$上的赋准范。$(\tilde{E},\ N(x))$是一个完备的赋准范空间，按照 Banach 的术语，称完备的分离的赋准范空间为 Frechet 空间。

注 按照 Bourbaki 的术语，称完备局部凸线性距离空间为 Frechet 空间。为区别起见，在此称局部凸 Frechet 空间为(F)空间。

在§5 中已经指出，对于线性距离空间，如果其上的距离是平移不变的，则它作为距离空间的完备性和作为线性拓扑空间的完备性是一致的。下述定理说明完备的线性距离空间（作为距离空间是完备的）对于相应的赋准范一定是完备的，从而是一个 Frechet 空间。定理 4 首先由 Banach 猜测，最后由 V. L. Klee 于 1952 年证明。

定理 4 完备的线性距离空间G，必可改赋以一个不变距离ρ。G按这个不变距离必是完备的。

引理 1 （Sierpinski） 设$(E,\ \rho)$是距离空间，G是E的子集，G上有一个距离ρ_1，$(G,\ \rho_1)$和$(E,\ \rho)$在G上的导出拓扑一致。如果$(G,\ \rho_1)$是完备的，则G是$(E,\ \rho)$中的G_δ集（能表示为可数多个开集的交的集称为G_δ集）。

证 设$x\in G$，由假设ρ和ρ_1在G上导出相同的拓扑。对于每个自然数n，必存在数$\varepsilon_n(x)<\frac{1}{n}$，$\varepsilon_n(x)>0$，使

$$y\in G,\ \rho(x,\ y)<\varepsilon_n(x)\Rightarrow\rho_1(y,\ x)<\frac{1}{n}.$$

令

$$U_n(x)=\{y\in E\,|\,\rho(x,\ y)<\varepsilon_n(x)\}$$

及
$$O_n=\bigcup_{x\in G}U_n(x),$$
则O_n是E中的开集，且包含G。而$D=\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$是$E$中的$G_\delta$集。显然有$G\subset D$，如果能够证明$D\subset G$，则$G=D$，即知$G$是$E$中的$G_\delta$集。

事实上，设$x_0\in D$，对任一自然数n，由D的定义，$x_0\in O_n$，所以存在$x_n\in G$，使$x_0\in U_n(x_n)$，于是
$$\rho(x_0,x_n)<\varepsilon_n(x).$$
由假设$\varepsilon_n(x)<\frac{1}{n}$，所以$\rho(x_0,x_n)<\frac{1}{n}$。从而可知
$$\rho(x_0,x_n)\to 0.$$
下面指出$\{x_n\}$也是(G,ρ_1)中的基本序列：
事实上，对于任给的$\varepsilon>0$，取自然数n，使$\frac{2}{n}<\varepsilon$。然后取自然数m，使
$$\frac{1}{m}<\varepsilon_n(x_n)-\rho(x_0,x_n),$$
则当$k>m$时，有
$$\rho(x_k,x_n)\leqslant\rho(x_k,x_0)+\rho(x_0,x_n)$$
$$\leqslant\frac{1}{k}+\rho(x_0,x_n)<\varepsilon_n(x_n).$$
所以当$k>m$时，有
$$\rho_1(x_k,x_n)<\frac{1}{n};$$
当k、$l>m$时，
$$\rho_1(x_k,x_l)\leqslant\rho_1(x_k,x_n)+\rho_1(x_n,x_l)$$
$$<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}<\varepsilon,$$
这就是说x_k按ρ_1也是基本序列。由于(G,ρ_1)是完备的，x_k必收敛于某点$x_0'\in G$，$\rho_1(x_k,x_0')\to 0$，从而也有$\rho(x_k,x_0')\to 0$，由上述已经知道，$\rho(x_k,x_0)\to 0$，所以$x_0=x_0'$，即$x_0=x_0'\in G$，于是证得$D\subset G$。证毕。

定理 4 证明　设 G 上原来的距离是 ρ_1，ρ 是 G 上改赋的不变距离，即 ρ 关于平移不变，$\rho(x+z, y+z)=\rho(x, y)$，并且 ρ_1 和 ρ 在 G 上导出的拓扑一致。设 G 按距离 ρ 的完备化空间为 $\tilde{G}$，$\tilde{G}$ 是一个线性距离空间，而 (G, ρ_1) 是 $(\tilde{G}, \rho)$ 的子空间。由假设 (G, ρ_1) 是完备的，满足引理 1 中的条件，故

$$G=\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$$

是 $(\tilde{G}, \rho)$ 中的 G_δ 集。由于 G 是 $\tilde{G}$ 的稠密线性子空间，O_n 又包含 G，所以 $\tilde{G}\setminus O_n$ 是一个疏朗集，于是

$$\tilde{G}\setminus G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\tilde{G}\setminus O_n)$$

是 $\tilde{G}$ 中的第一纲集。下面证明 $\tilde{G}\setminus G$ 是空集。事实上，如果 $\tilde{G}\setminus G$ 不是空集，则存在 $x_0\in\tilde{G}\setminus G$，$x_0\neq 0$，从而也有 $x_0+G\subset\tilde{G}\setminus G$，这样，$x_0+G$ 是第一纲集的子集，故必也是第一纲集。由于 $\tilde{G}$ 是线性拓扑空间，平移映照是拓扑同胚映照，所以推得 G 也是 $\tilde{G}$ 中的第一纲集，但这是不可能的；因为否则，由

$$\tilde{G}=G\cup(\tilde{G}\setminus G)$$

推得 $\tilde{G}$ 是第一纲的，而完备距离空间 $(\tilde{G}, \rho)$ 是第二纲的，出现了矛盾。由此必须有 $\tilde{G}=G$，即 G 关于不变距离 ρ 是完备的。证毕。

下面我们讨论线性距离空间中的一类，称为赋 p-范空间。

定义　设 E 是线性空间，p 为一正数，$\|x\|_p$，$x\in E$ 是 E 上的实泛函，满足下列条件：

(i)　$\|x\|_p\geqslant 0$，而 $\|x\|_p=0\Longleftrightarrow x=0$；

(ii)　$\|x+y\|_p\leqslant\|x\|_p+\|y\|_p$；

(iii)　$\|\alpha x\|_p=|\alpha|^p\|x\|_p$（$\alpha$ 为数）。

则称 $\|\cdot\|_p$ 为 E 上的 p-范数。E 按 p-范数 $\|\cdot\|_p$ 成为赋 p-范空间。

在此要说明：当 $E\neq\{0\}$ 时，$p\leqslant 1$。事实上，由(ii)及(iii)推得

$$2^p\|x\|_p=\|2x\|_p\leqslant 2\|x\|_p.$$

取 $x\neq 0$，则根据(i)，$\|x\|_p>0$；因此由上式，$2^p\leqslant 2$，即 $p\leqslant 1$。

例 2　设 E_n 是 n 维空间，按通常的加法和数乘是一个线性空

间。设 $0<p\leqslant 1$，当 $x=(x_1,\cdots,x_n)$时，规定

$$\|x\|_p=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p,$$

则 E_n 按 $\|x\|_p(x\in E_n)$ 是一个赋 p-范空间，这只要验证 $\|x\|_p$ 满足 p-范数的条件(ii)。事实上，当 a、b 为正数时，$(a+b)^p\leqslant a^p+b^p$ 这点可以由 $\frac{d}{dt}[(t+1)^p-t^p]\leqslant 0(t>0)$ 立即看出 $(t+1)^p\leqslant t^p+1$，再取 $t=\frac{a}{b}$ 即知。由此不难推出(ii)。

例 3 设 E 是直线上的勒贝格 (Lebesgue) 可测集，$0<p\leqslant 1$，$L^p(E)$ 是 E 上的可测函数并且是 p 次勒贝格可积函数全体。规定 $L^p(E)$ 中凡在 E 上几乎处处相等的函数表示同一个向量。$L^p(E)$ 按通常函数的加法及函数与数的乘法是一个线性空间。在 $L^p(E)$ 上规定

$$\|\varphi\|_p=\int_E|\varphi(t)|^p dt \quad (\varphi\in L^p(E)),$$

如在例 2 中所述，$|\varphi+\psi|^p\leqslant|\varphi|^p+|\psi|^p$。由此易知 $\|\varphi+\psi\|_p\leqslant\|\varphi\|_p+\|\psi\|_p$。所以 $\|\varphi\|_p$ 是 $L^p(E)$ 上的 p-范数。

设 E 是赋 p-范空间，在 E 上引进不变距离

$$\rho(x,y)=\|x-y\|_p,$$

容易看出 E 按 $\rho(x,y)$ 成为线性距离空间。

定义 设 E 是线性拓扑空间，如果在 0 点存在一个有界的环境，则称 E 是*局部有界的*。

在此应指出，局部有界的线性拓扑空间一定满足第一可列公理。事实上，若设 V 是 0 的一个有界环境，那末

$$\mathscr{V}=\left\{\frac{1}{n}V,\ n=1,2,\cdots\right\}$$

是 0 的一组环境基，所以必满足第一可列公理。

下面要指出线性拓扑空间局部有界是赋 p-范空间的特征。首先有

引理 2 赋 p-范空间是局部有界的，且满足 T_0 公理。

证 设$(E,\|\cdot\|_p)$是赋 p-范空间，作 0 的环境

$$V=\{x\mid \|x\|_p<1\}$$

则 V 就是 0 的有界环境。事实上，设 U 是 E 中 0 的任一环境，则必有正数 δ，使

$$U\supset\{x\mid \|x\|_p<\delta\}.$$

因此当 $|t|<\delta^{1/p}$ 时，$\lambda V\subset U$，即 V 是有界的。至于 T_0 分离公理可以由赋 p-范空间定义中的条件(i)得知。证毕。

设 E 是线性拓扑空间，如果在 E 上存在一个 p-范数 $\|x\|_p$，使得距离 $\rho(x, y)=\|x-y\|_p$ 所导出的拓扑与 E 的拓扑一致，则称 E 是可赋 p-范的。下述定理是由 S. Ralewicz 在 1957 年证明的。

定理 5　设 E 是线性拓扑空间，那末 E 是可赋 p-范的充要条件是：E 满足 T_0 公理，而且是局部有界的。

证　必要性由引理 2 即可知。

充分性：设 E 是局部有界的，存在 0 的一个有界环境 V，然后取 0 的均衡环境 U，使

$$U+U\subset V,$$

由于 V 是有界的，其子集 $U+U$ 一定也是有界集，所以必被 0 的环境 U 吸收，故必存在正数 c，使得

$$U+U\subset cU. \tag{13}$$

由于 $2U\subset U+U$，根据(13)知，$2U\subset cU$，所以 $2\leqslant c$，令

$$p=\log_c 2. \tag{14}$$

下面证明 E 是可赋 p-范数的，要用到定理 2 的部分结论。

令

$$U_k=c^{-k}U\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

由(13)即知，对于一切 n，定理 2 的证明中(9)式满足。首先，我们指出 $\{U_k,\ k=1,\ 2,\ \cdots\}$ 是 E 中 0 的一组环境基。事实上，如果 W 是 E 中 0 的任一环境，则由于 U 是有界的，故必有正数 δ，使得当 $|\lambda|\leqslant\delta$ 时，$\lambda U\subset W$，取自然数 k，使 $c^{-k}\leqslant\delta$，那末 $U_k=c^{-k}U\subset W$。所以 $\{U_k\}$ 是 0 的环境基。

利用定理 2 的证明 2) 和 3)，可以得到 E 上的函数 $N(x)$，它适合条件 (v)、(vi)、(vii)，此外 N 还满足条件：

对于任何整数 k，有

$$N(c^k x)=(c^k)^p N(x). \tag{15}$$

事实上，由于 $c^l U\left(\frac{1}{2^k}\right)=c^l U_k=c^{l-k}U=U_{k-l}=U\left(2^l\frac{1}{2^k}\right)$，所以对一切 $r\in\mathfrak{R}$，都有

$$c^l U(r)=U(2^l r). \tag{16}$$

由(16)，我们得到

$$\begin{aligned}N(c^k x)&=\inf\{r\mid c^k x\in U(r)\}\\&=\inf\{r\mid x\in U(2^{-k}r)\}\\&=2^k\inf\{2^{-k}r\mid x\in U(2^{-k}r)\}\\&=2^k N(x)=(c^k)^p N(x),\end{aligned}$$

这就是(15)。

作 E 上的函数

$$\|x\|_p=\sup_{t>0}\frac{N(tx)}{t^p}, \tag{17}$$

则可以证明

$$N(x)\leqslant\|x\|_p\leqslant 2N(x). \tag{18}$$

事实上，在(17)中取 $t=1$，即知 $\|x\|_p\geqslant N(x)$。另外，对任何 $t>0$，必有自然数 n，使 $t=c^n s$，其中 $1\leqslant s<c$。由 (15) 和 N 的均衡性(vi)可知道

$$\begin{aligned}\frac{N(tx)}{t^p}=\frac{N(c^n sx)}{(c^n s)^p}=\frac{N(sx)}{s^p}\leqslant N(sx)\leqslant N(cx)\\=c^p N(x)=2N(x).\end{aligned}$$

在上式右边对 $t>0$ 取上界，即得 $\|x\|_p\leqslant 2N(x)$。

由(18)和定理 2 中的(v)可知 $\|x\|_p$ 是 E 上有限值函数，满足 p-范数的条件(i)。设 x_1、$x_2\in E$，$\varepsilon>0$，由定义 (17)，有正数 t，使

$$\|x_1+x_2\|_p<\frac{N(t(x_1+x_2))}{t^p}+\varepsilon,$$

又由 N 的性质(vii)，有

$$\|x_1+x_2\|_p\leqslant\frac{N(tx_1)}{t^p}+\frac{N(tx_2)}{t^p}+\varepsilon\leqslant\|x_1\|_p+\|x_2\|_p+\varepsilon,$$

令 $\varepsilon\to 0$，即得 $\|x_1+x_2\|_p\leqslant\|x_1\|_p+\|x_2\|_p$。

下面验证 p-范数的条件(iii)，由定义(17)可知：对于任何正数 λ，有

$$\|\lambda x\|_p=\sup_{t>0}\frac{N(\lambda tx)}{t^p}=\lambda^p\sup_{t>0}\frac{N(\lambda tx)}{(\lambda t)^p}=\lambda^p\|x\|_p,$$

又由 N 的性质(vi)，当 $|\lambda|=1$ 时，$N(\lambda x)=N(x)$，因此当 $|\lambda|=1$ 时，$\|\lambda x\|_p=\|x\|_p$，因此对任何复数 λ，有

$$\|\lambda x\|_p=\|\,|\lambda|x\|_p=|\lambda|^p\|x\|_p,$$

即知 $\|x\|_p$ 是 p-范数。

由(18)和定理 2 证明中的 4 即知 E 上的拓扑是由 $\|x\|_p$ 导出的，证毕。

§9　凸集、Minkowski 泛函和局部凸的概念

设 E 是线性空间，x_1、$x_2\in E$，E 中形如 $x=(1-t)x_1+tx_2$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的向量全体称为联结 x_1、x_2 的线段，记为 $[x_1, x_2]$，x_1、x_2 称为此线段的端点，$[x_1, x_2]$ 中其余的点称为此线段的内点。

设 $K\subset E$ 是一个非空集合，如果联结 K 中任意两点的线段都属于 K，则称 K 为凸集。容易知道，任意个凸集的通集是凸集。

(I) 设 K 为凸集，x_1、x_2、…、$x_n\in K$，$0\leqslant t_\nu\leqslant 1$，$\sum\limits_{\nu=1}^{n}t_\nu=1$，则 $\sum\limits_{\nu=1}^{n}t_\nu x_\nu\in K$。

证　用归纳法证：设 $n=1$，命题显然成立，设 $n=k$ 时结论成立，当 $n=k+1$ 时，因为

$$\frac{t_1}{t_1+\cdots+t_k}x_1+\cdots+\frac{t_k}{t_1+\cdots+t_k}x_k\in K,$$

故

$$\sum_{\nu=1}^{k+1}t_\nu x_\nu=t_{k+1}x_{k+1}+\left(\sum_{\nu=1}^{k}t_\nu\right)\left[\frac{t_1}{t_1+\cdots+t_k}x_1+\cdots+\frac{t_k}{t_1+\cdots+t_k}x_k\right]\in K.$$

证毕。

(II) 设 K 为非空集合，则 K 是均衡凸集的充要条件是：对于

一切 x、$y\in K$ 和适合条件 $|\alpha|+|\beta|\leqslant 1$ 的 α 和 β，均有 $\alpha x+\beta y\in K$。

证 充分性是显然的。

必要性：设 K 是均衡凸集，x、$y\in K$，$|\alpha|+|\beta|\leqslant 1$，如果 α、β 均不为 0，那末由于 K 是均衡的，有

$$(|\alpha|+|\beta|)\frac{\alpha}{|\alpha|}x\in K,\quad (|\alpha|+|\beta|)\frac{\beta}{|\beta|}y\in K.$$

再由 K 是凸集，得到

$$\alpha x+\beta y=\frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}(|\alpha|+|\beta|)\frac{\alpha}{|\alpha|}x+\frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|}(|\alpha|+|\beta|)\frac{\beta}{|\beta|}y\in K.$$

如果 α、β 至少一个为 0，结论是显然的。证毕。

设 K 是一个凸集，$x_0\in E$，如果有两个线段 $[x_1, x_0]$ 及 $[x_0, x_2]$ 使 $[x_1, x_0]$ 的内点都属于 K，而 $[x_0, x_2]$ 的内点都不属于 K，则称 x_0 为 K 的境界点。此时 x_0 可以属于 K，也可以不属于 K。K 的境界点全体 Γ 称为 K 的境界，$K\backslash\Gamma$ 称为 K 的凸核。线性空间 E 的子集 S 称为在 x_0 点吸收的，是指 S 包含过 x_0 点的任何方向的线段，即对于每一个 $y\in E$，存在 $z\neq x_0$，使

$$[x_0, z]\subset[x_0, y]\cap S.$$

由此可知，以前定义的吸收集即是在 0 点吸收的集。由定义直接可知，若 $x_0\in K\backslash\Gamma$，即 x_0 点是集 K 的凸核中的点，如果 K 至少包含 2 点，那末 K 必在 x_0 点吸收。所以除了单点集的情况外，集 K 的凸核就是吸收点集全体，也称为吸收核。

(III) 设 K 是一凸集，$a\in E$，那末平移映照 $T_a: x\mapsto x+a$ 将凸集 K 映为凸集 $K+a$，且将 K 的境界映为 $K+a$ 的境界。

设 E 是线性空间，$p(x)$ 为 E 上的泛函，如果满足：

(1) 当 $x\in E$ 时，$p(x)\geqslant 0$；

(2) 当 x，$y\in E$ 时，$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$ （次可加）；

(3) 当 $x\in E$，而数 $\alpha\geqslant 0$ 时，$p(\alpha x)=\alpha p(x)$ （正齐次）。则称 p 为凸泛函。

(IV) 设 $p(x)$ 为线性空间 E 上的凸泛函，那末对任一数 $c>0$ 及任一点 $a\in E, K=\{x \mid p(x-a)<c\}$ 是一个凸集。而且当 $E\neq\{0\}$ 时，K 的境界由适合条件

$$p(x-a)=c$$

的点全体所组成。

证　不妨设 $a=0$，因为由 III，如果 $a\neq 0$，只要作平移 T_{-a}: $x\mapsto x-a$ 就可以了。

如果 x_1、$x_2\in K$，那末 $p(x_1)<c$，$p(x_2)<c$。当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned} p(tx_2+(1-t)x_1) &\leqslant p(tx_2)+p((1-t)x_2) \\ &= tp(x_2)+(1-t)p(x_2) \\ &< t\cdot c+(1-t)\cdot c=c. \end{aligned}$$

所以 $[x_1, x_2]\subset K$，即 K 是凸集。

下面证第二个结论：设 $x_0\in E$，$p(x_0)=c$。记 $x_1=\dfrac{x_0}{2}$，$x_2=2x_0$，那末当 $0<t<1$ 时，

$$\begin{aligned} p((1-t)x_0+tx_1) &= p\left((1-t)x_0+\frac{t}{2}x_0\right), \\ &= \left(1-\frac{t}{2}\right)p(x_0)<c; \\ p((1-t)x_0+tx_2) &= p((1-t)x_0+2tx_0) \\ &= (1+t)p(x_0)>c. \end{aligned}$$

所以 $[x_1, x_0]$ 的内点都属于 K，而 $[x_0, x_2]$ 的内点都不属于 K，即 x_0 是 K 的境界点。

反之，如果 x_0 是 K 的境界点，设 $[x_1, x_0]$ 的内点都属于 K，而 $[x_0, x_2]$ 的内点都不属于 K，则当 $0<t<1$ 时，

$$p((1-t)x_0+tx_1)<c;\quad p((1-t)x_0+tx_2)\geqslant c.$$

因此

$$\begin{aligned} (1-t)p(x_0)=p((1-t)x_0) &\leqslant p((1-t)x_0+tx_1)+p(-tx_1) \\ &< c+tp(-x_1), \end{aligned} \tag{1}$$

而且

$$\begin{aligned} c\leqslant p((1-t)x_0+tx_2) &\leqslant p((1-t)x_0)+p(tx_2) \\ &\leqslant (1-t)p(x_0)+tp(x_2). \end{aligned} \tag{2}$$

在(1)、(2)中令 $t\to 0$，即得 $p(x_0)=c$。证毕。

例 1 在平面上定义凸泛函

$$p(x)=\sqrt{a_1x_1^2+a_2x_2^2},$$

其中 $x=(x_1,x_2)$，$a_1>0$，$a_2>0$。那末$\{x\mid p(x)<c\}$即是椭圆

$$a_1x_1^2+a_2x_2^2=c^2$$

的内部，是一个凸集，其境界即是椭圆周。

设 E 是一个实(复)的线性空间，$p(x)$ 是 E 上的一个泛函，适合下面三个条件：

(1) $p(x)\geqslant 0$，$x\in E$；

(2) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$，$x,y\in E$；

(3) $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$，$x\in E$，而 α 为一数。

则称 $p(x)$ 为一拟范数。显然，拟范数必是凸泛函。反之，则不尽然。

(V) 设 $p(x)$是线性空间 E 上的拟范数，那末

$$K=\{x\mid p(x)<1\}$$

是一个均衡凸吸收集。

证 由(IV)知 K 是一个凸集。如果 $x\in K$，且 $|\alpha|\leqslant 1$，则由 $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)<1$ 知道 $\alpha x\in K$，因而 K 是均衡的。下面证明 K 是吸收的。设 $x\in E$，如果 $p(x)\neq 0$，取 $\delta=\dfrac{1}{2p(x)}$，则当$|\lambda|\leqslant\delta$时，$\lambda x\in K$，如果 $p(x)=0$，那末对于一切 λ，$\lambda x\in K$，所以 K 是吸收的。证毕。

在(IV)、(V)中，我们看到由凸泛函可以构造相应的凸集。相反地，下面将看到 E 中的吸收凸集总可用凸泛函来描述。

设 E 是线性空间，V 是 E 中吸收凸集，如下定义的实值函数 $p_V(x)$(或简单地记作 $p(x)$) 称为关于 V 的Minkowski 泛函 (gauge)：

$$p_V(x)=\inf\{\lambda>0\mid x\in\lambda V\}.$$

由于集 V 是吸收的。对于 E 中的任意一点 x，总存在 $a>0$，使 $ax\in V$，即 $x\in\dfrac{1}{a}V$，所以 $p_V(x)$ 总对应一个有限值。$p_V(x)$ 有下

述重要性质：

(VI) 设 E 是线性空间，V 是 E 中的吸收凸集，则相应于 V 的 Minkowski 泛函 $p_V(x)$ 是凸泛函。又如果 V 是均衡的，则 $p_V(x)$ 是一个拟范数。

证 我们已经知道 $p_V(x)$ 在整个 E 上有定义，且为有限值。由定义即知 $p_V(x)\geqslant 0$。设 $x\in E$，$\alpha>0$，则有

$$p_V(\alpha x)=\inf_{\substack{\alpha x\in\lambda V\\ \lambda>0}}\lambda=\alpha\cdot\inf_{\substack{x\in(\lambda/\alpha)V\\ \lambda>0}}\frac{\lambda}{\alpha}=\alpha p_V(x).$$

下面证明 $p_V(x)$ 是次可加的。设 $x, y\in E$。取 $\mu<p(x)+\varepsilon$，使 $x\in\mu V$；取 $\nu<p(y)+\varepsilon$ 使 $y\in\nu V$，于是 $\frac{x}{\mu}\in V$，$\frac{y}{\nu}\in V$。由 V 是凸集

$$\frac{1}{\mu+\nu}(x+y)=\frac{\mu}{\mu+\nu}\frac{x}{\mu}+\frac{\nu}{\mu+\nu}\frac{y}{\nu}\in V,$$

从而 $x+y\in(\mu+\nu)V$，由 $p_V(x+y)$ 的定义得

$$p_V(x+y)\leqslant\mu+\nu<p_V(x)+p_V(y)+2\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$，即得 $p_V(x+y)\leqslant p_V(x)+p_V(y)$，从而就证明了 $p_V(x)$ 是凸泛函。后一结论也容易推得。证毕。

如果 V 是某拟范数 $p(x)$ 相应的单位球，即 $V=\{x|p(x)\leqslant 1\}$，则容易证明相应于 V 的 Minkowski 泛函 $p_V(x)=p(x)$，$x\in E$。此时有 $V=\{x|p_V(x)\leqslant 1\}$。但是如果从某吸收集 U 开始作 Minkowski 泛函 $p_U(x)$，则 U 一般并不一定等于 $p_U(x)$ 的单位球，但是有如下关系：

定理 1 设 E 是线性空间，U 是 E 中的一吸收凸集，记 $p(x)$ 是 U 相应的 Minkowski 泛函，则有

(1) $\{x|p(x)<1\}\subset U\subset\{x|p(x)\leqslant 1\}$；

(2) $\Gamma=\{x|p(x)=1\}$ 是 U 的境界全体；

(3) $\{x|p(x)<1\}$ 是 U 的凸核。

证 (1) 设 $x_0\in E$，$p(x_0)<1$，则必存在 a，使

$$p(x_0)\leqslant a<1,\ 且\ x_0\in aU.$$

由于 U 是吸收的，所以 $0\in U$。又因 U 是凸集，即知 $x_0\in aU\subset U$。

(1) 的右边的关系是显然的。

(2) 的证明与性质(IV)的证明相同。

(3) 根据凸核定义及(1)、(2)，有

$$\{x \mid p(x)<1\}=U\backslash\{x \mid p(x)=1\}=U\backslash\Gamma,$$

即知$\{x \mid p(x)<1\}$是U的凸核。证毕。

设$p(x)$是拟范数，如果$p(x)=0$的充要条件是$x=0$，则称$p(x)$为范数。下面给出一个吸收凸集的 Minkowski 泛函是范数的条件：

(VII) 设$p(x)$为范数，则$U=\{x \mid p(x)\leqslant 1\}$是一吸收的均衡凸集。且当$x\in E$, $x\neq 0$时，必有λ，使$\lambda x\overline{\in}U$。

(VIII) 设U是一吸收均衡凸集，而且适合如下条件：当$x\in E$, $x\neq 0$时，必有λ使$\lambda x\overline{\in}U$，则U的 Minkowski 泛函$p(x)$是一个范数。

证 由(VI)，$p(x)$是一个拟范数，再证$p(x)$是范数。如果$x\in E$, $x\neq 0$，由假设，必存在λ，使得$\lambda x\overline{\in}U$。则由定理 1 知$p(\lambda x)\geqslant 1$，即$|\lambda|p(x)\geqslant 1$。所以$p(x)\neq 0$，从而$p(x)$是一个范数。

例 2 对于平面上的任意一个包含 0 点的有界凸区域K，它的 Minkowski 泛函$p(x)$是一个范数，且

$$K=\{x \mid p(x)<1\}.$$

下面引进凸包的概念：

定义 设E是线性空间，A为E中的集，令

$$co(A)=\{t_1x_1+\cdots+t_nx_n \mid t_i\geqslant 0,\ \sum_1^n t_i=1,\ x_i\in A\},$$

则$co(A)$称为集A的凸包。

(IX) 设A是线性空间E中的任意一集合，则$co(A)$为包含A的最小凸集。

证 设x、$y\in co(A)$，那末$x=\sum_{i=1}^n t_i x_i$, $y=\sum_{i=1}^m s_i y_i$，其中x_i、$y_i\in A$, $t_i\geqslant 0$, $s_i\geqslant 0$, $\Sigma t_i=1$, $\Sigma s_i=1$。如果$0\leqslant t\leqslant 1$。因$\sum_{i=1}^n t\cdot t_i$

$+\sum_{i=1}^{m}(1-t)s_i=1$，于是有

$$tx+(1-t)y=t\sum_{i=1}^{n}t_i x_i+(1-t)\sum_{i=1}^{m}s_i y_i\in co(A).$$

即 $co(A)$ 是凸集，又易知 $A\subset co(A)$，所以 $co(A)$ 是包含 A 的凸集．设 K 是包含 A 的任一凸集．则由(I)知

$$co(A)\subset K.$$

即 $co(A)$是包含 A 的最小凸集．证毕．

(X) 设 A 是线性空间 E 中的均衡集，则 $co(A)$ 必是均衡的．

证　设 $|\lambda|\leqslant 1$，因为 A 是均衡的，$\lambda A\subset A$，由此 $co(\lambda A)\subset co(A)$，但 $\lambda co(A)=co(\lambda A)$，所以 $\lambda co(A)\subset co(A)$，即 $co(A)$为均衡的．

同时有下述简单性质：

(XI) 设 A、B 是 E 中的任意两个集合，a、b 是任意两数，则

$$co(aA+bB)=a\,co(A)+b\,co(B).$$

(XII) $co(A\cup B)=\cup\{[x,y]\,|\,x\in co(A),\ y\in co(B)\}$.

下面叙述与拓扑有关的凸体的概念．

定义　设 E 是线性拓扑空间，如果 E 中的凸子集 U 包含非空内点，则称 U 为 E 中的凸体．

下面定理给出线性拓扑空间中吸收凸集成为凸体的条件：

定理 2　设 E 是线性拓扑空间，U 是 E 中的一吸收凸集，则 U 是 E 中的凸体的充要条件是：相应于 U 的 Minkowski 泛函 $p(x)$ 是 E 中的连续凸泛函．

证　设 U 包含 0 点作为它的内点．那末存在一个 0 的均衡环境 $V\subset U$．设 $p(x)$是 U 的 Minkowski 泛函，由定理 1，$U\subset\{x\,|\,p(x)\leqslant 1\}$，所以当 $x\in V$ 时．$p(x)\leqslant 1$．对于任给 $\varepsilon>0$，当 $x\in\varepsilon V$ 时，有 $p(x)\leqslant\varepsilon$，即 $p(x)$在 0 点连续．

容易推得 $p(x)$在 E 中每一点都是连续的．事实上，设$x_0\in E$，则当 $x\in x_0+\varepsilon V$ 时，因 $x-x_0\in\varepsilon V$，有

$$p(x)-p(x_0)\leqslant p(x-x_0)\leqslant\varepsilon.$$

同样，由于 V 是均衡的，有

$$p(x_0)-p(x)\leqslant\varepsilon,$$

即 $|p(x)-p(x_0)|\leqslant\varepsilon$，$p(x)$在$E$中的每一点连续。

反之，设$p(x)$连续，则$\{x|p(x)<1\}$是一个开集，由定理1知：$\{x|p(x)<1\}\subset U\subset\{x|p(x)\leqslant 1\}$，所以$\{x|p(x)<1\}$既是$U$的凸核又是$U$的内点全体，$U$是凸体是明显的。

对于一般情况，设U是一个吸收凸集，x_0是U的内点，则$U-x_0$以0点为内点。因为U在0点吸收，所以$U-x_0$在$-x_0$点吸收，即$-x_0$属于$U-x_0$的凸核。由上面的讨论可知：$U-x_0$的内点全体与凸核一致，所以$-x_0$也是$U-x_0$的内点，从而U必以0为内点，化为上述情况。证毕。

推论 设E是线性拓扑空间，U是E中的吸收的凸体，$p(x)$是U的Minkowski泛函，则U的凸核就是U的内点全体，为集$\{x|p(x)<1\}$。而U的闭包是集$\{x|p(x)\leqslant 1\}$。

由定义直接知道凸开集是凸体。

(XIII) 设A是线性拓扑空间E中的开集，则$co(A)$是开集。

证 设 $\varphi=t_1^0x_1^0+t_2^0x_2^0+\cdots+t_n^0x_n^0\in co(A)$，其中$t_i^0\geqslant 0$，$\Sigma t_i^0=1$，$x_i^0\in A$，不妨设$t_1^0>0$，因为$x_1^0$是$A$的内点，有0的环境$V$，使$x_1^0+V\subset A$，因此对一切$x\in V$，有

$$t_1^0(x_1^0+x)+\cdots+t_n^0x_n^0\in co(A),$$

即知 $\varphi+t_1^0V\subset co(A)$。因此$\varphi$是$co(A)$的内点，$co(A)$是开集。

在凸集上线性泛函的连续性：

设E是线性拓扑空间，A是E中的凸子集，$f|A$表示E上的函数f在A上的限制。如果$f|A$是连续的，则称f在A上连续。

定理3 设E是线性拓扑空间，A是E中的凸子集，f是E上的线性泛函，则

(a) 如果E是实线性空间，那末$f|A$是连续的充要条件是：对每一个实数a，$f^{-1}(a)\cap A$是A中的闭集。

(b) 如果E是实线性空间，$f(A)$是对称集，那末$f|A$连续的充要条件是：$f^{-1}(0)$是A中的闭集。

(c) 如果E是复线性空间，A是E中均衡凸集，那末$f|A$连

续的充要条件是：$f^{-1}(0)$是A中的闭集。

(d) 设f是E上线性泛函，A是E中均衡凸集，那末$f|A$一致连续的充要条件是：$f|A$在0点连续。

证 (a)必要性是明显的。

充分性：要证明$f|A$是连续的，只要证明对于每个数a，$\{x|f(x)\leqslant a\}\cap A$以及$\{x|f(x)\geqslant a\}\cap A$是$A$中闭集。

令$B=\{x|f(x)\leqslant a\}\cap A$，设$y\in A\backslash B$。即$y\in A$而$y\overline{\in}B$。则$f(y)>a$。而由条件$f^{-1}(a)\cap A$在$A$中是闭的，因为$y\overline{\in}f^{-1}(a)\cap A$，所以存在一个0的均衡环境$U$，使

$$(y+U)\cap f^{-1}(a)\cap A=\varnothing.$$

下面要证明$(y+U)\cap B=\varnothing$。事实上，若不是这样，则必有元$x\in(y+U)\cap B$。因$x\in B$，所以$f(x)\leqslant a$。另外，因为$x\in y+U$，由U的均衡性知$[x,y]\subset y+U$。而$f(y)>a$，把f限制在线段$[x,y]$上总是连续函数，根据达布定理，在$[x,y]$中必存在一点$x'\in[x,y]$使得$f(x')=a$。但因$x'\in[x,y]\subset(y+U)\cap A$，这就与$(y+U)\cap A\cap f^{-1}(a)=\varnothing$相矛盾，所以必有$(y+U)\cap B=\varnothing$。由此知道$B$在$A$中是闭集，同样可以证明$\{x|f(x)\geqslant a\}\cap A$是$A$中的闭集。所以$f|A$是连续的。

(b) 证充分性：设$f^{-1}(a)\cap A$非空，由假设$f(A)$是对称的，必存在$y_0\in A$，使得$f(y_0)=-a$。对每一个$x\in f^{-1}(a)\cap A$，有$f\left(\frac{y_0+x}{2}\right)=\frac{1}{2}(f(y_0)+f(x))=0$，所以$\frac{y_0+x}{2}\in f^{-1}(0)\cap A$。记

$h(x)=\frac{y_0+x}{2}$，$h(x)$是A到A的连续函数。由

$$f^{-1}(a)\cap A=h^{-1}(f^{-1}(0)\cap A)$$

知$f^{-1}(a)\cap A$是A中闭集，由(a)即知$f|A$是连续的。

为了证明(c)，我们先证(d) 设x、$y\in A$，因A是均衡凸的，知$\frac{x-y}{2}\in A$，由于

$$|f(x)-f(y)|=2\left|f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|,$$

如果 f 在 A 中 0 点连续，$f|A$ 必定一致连续。

(c) 证充分性：设 $r(x)=Ref(x)$，同时令

$$B=\{x|f(x)\text{取实数值}\},$$

则 B 是 E 中的对称凸集，由假定，$f^{-1}(0)\cap A$ 在 A 中是闭的，所以存在 E 中的闭集 M，使得

$$f^{-1}(0)\cap A=M\cap A.$$

由于 $r^{-1}(0)\cap A\cap B=f^{-1}(0)\cap A\cap B=M\cap A\cap B$ 知道，$r^{-1}(0)\cap A\cap B$ 是 $A\cap B$ 中的闭集。由(b)知道，$r(x)$在 $A\cap B$ 上连续，所以对任一 $\varepsilon>0$，必存在 0 的均衡环境 U，使

$$x\in U\cap A\cap B\Longrightarrow|r(x)|<\varepsilon.$$

当 $x\in U\cap A$ 时，总可以取 $|a|=1$，使

$$|f(x)|=af(x)=f(ax).$$

那么，因 $U\cap A$ 是均衡的，$ax\in U\cap A\cap B$，所以

$$|f(x)|=f(ax)=|r(ax)|<\varepsilon.$$

即 $f(x)$在 A 中的 0 点连续，由(d)知，$f(x)$在 A 上连续。

其余的证明是明显的。证毕。

局部凸线性拓扑空间的基本概念：

定义 设 E 是线性拓扑空间，如果在 E 中存在由凸集组成的 0 的环境基，则称 E 是局部凸线性拓扑空间，或简称局部凸空间。

显然，如果 E 是局部凸的，E 中每一点都存在由凸环境组成的环境基。

引理 1 每个局部凸空间 E，必存在由均衡吸收凸集组成的 0 的环境基。

证 设 V 是 E 中 0 的环境，由于 E 是局部凸的，必有 0 的凸环境 $W\subset V$，再取 0 的均衡环境 $U\subset W$，作 U 的凸包 $co(U)$，由 $U\subset co(U)\subset W\subset V$，$co(U)$ 是 0 的均衡凸环境，并且 0 的均衡凸环境全体组成 0 的环境基。

设 E 是线性空间，如果在 E 上给定一族拟范数$\{\|x\|_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$，由这族拟范数导出 E 上的拓扑如下：任取 $\varepsilon>0$ 及 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathscr{A}$，作集

$$U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \varepsilon) = \{x \mid \|x\|_{\alpha_\nu} < \varepsilon, \nu = 1, 2, \cdots, n\},$$

这些集的全体记为$\mathscr{V}$，下面证明$\mathscr{V}$满足§3定理1中的条件，因此存在唯一的向量拓扑$\mathscr{T}$，使$(E, \mathscr{T})$是一个线性拓扑空间，而且以$\mathscr{V}$作为0的环境基。则称$\mathscr{T}$为由拟范数族$\{\|x\|_\alpha, \alpha \in \mathscr{A}\}$导出的拓扑。此时$(E, \mathscr{T})$称为赋拟范空间（有时更精确地称为赋一族拟范数空间），容易看出$U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \varepsilon)$是凸集。

(XIV) 赋拟范空间按照由一族拟范数族导出的拓扑是一个局部凸的线性拓扑空间。

证　只要验证$\mathscr{V}$满足§3定理1中的条件即可：

关于(1)：由$U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_m, \varepsilon) \subset U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \varepsilon_1) \cap U(\beta_1, \cdots, \beta_m, \varepsilon_2)$（其中$\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$）即得。

关于(2)：由$U\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + U\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \subset U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \varepsilon)$而得。

(3)是显然的。下面证(4)：任取$U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \varepsilon) \in \mathscr{V}$，设$x \in E$，如果$\|x\|_{\alpha_\nu} = 0 (\nu = 1, 2, \cdots, n)$，显然对一切$\lambda$，$\lambda x \in U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \varepsilon)$；如果$a = \max\limits_{1 \leq \nu \leq n} \|x\|_{\alpha_\nu} > 0$，取$\delta < \dfrac{\varepsilon}{a}$，则当$|\lambda| \leq \delta$时，

$$\lambda x \in U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \varepsilon),$$

所以$\mathscr{V}$满足§3中定理1的条件。证毕。

容易证明赋拟范空间E满足T_0公理的充要条件是：对于E中每个非零元x，$\sup\limits_{\alpha \in \mathscr{A}} \|x\|_\alpha > 0$。

定理4　设E是局部凸线性拓扑空间，则它的拓扑必可由一族拟范数$\{\|x\|_\alpha, \alpha \in \mathscr{A}\}$导出。

证　设E上原来的拓扑为$\mathscr{T}$，根据引理1，存在由均衡吸收凸集组成的0的环境基$\mathscr{V}$，对每个$V \in \mathscr{V}$，因为V是0的环境，必包含内点，所以V是凸体。根据定理2，相应于V的Minkowski泛函$p_V(x)$是E中的连续拟范数，考虑由拟范数族$\{p_V(x) \mid V \in \mathscr{V}\}$决定的拓扑，记作$\mathscr{T}'$。由于$p_V(x)$关于$\mathscr{T}$是连续的，因此$U(V, \varepsilon) = \{x \mid p_V(x) < \varepsilon\}$是拓扑$\mathscr{T}$的开集，从而

$$U(V_1,\cdots,V_n,\varepsilon)=\bigcap_{\nu=1}^{n}U(V_\nu,\varepsilon)$$

是拓扑$\mathscr{T}$的开集，因此$\mathscr{T}'\subset\mathscr{T}$。又因

$$\{x\,|\,p_V(x)<1\}\subset V,$$

于是$\mathscr{T}\subset\mathscr{T}'$，即得$\mathscr{T}=\mathscr{T}'$。证毕。

设 E 是线性拓扑空间，如果在 E 上存在一族拟范数$\{\|x\|_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$（一个范数$\|x\|$），使得这族拟范数（相应地，范数）导出的拓扑和原来的拓扑一致，则称 E 是可赋拟范的（相应地，可赋范的）。

定理 4 也可以叙述如下：

定理 4′ 线性拓扑空间 E 可赋拟范的充要条件是：E 是局部凸的线性拓扑空间。

这里需指出，在线性空间 E 上由一族拟范数$\{p_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$导出的局部凸向量拓扑是指由$\mathscr{V}=\{U(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\ \varepsilon)\}$作为局部基而决定的向量拓扑。它不同于使$\{p_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$中的拟范数都连续的 E 上的最弱拓扑。因为后者一般可以不是向量拓扑。

下面给出可赋范的条件：

定理 5（Колмогоров） 线性拓扑空间可赋范的充要条件是：

(1) E 满足 T_0公理；

(2) E 是局部凸的；

(3) E 是局部有界的。

证 必要性是显然的。

充分性：设线性拓扑空间满足条件(1)(2)(3)，U 是 E 中 0 的有界环境，由于 E 是局部凸的，必有均衡凸环境 $V\subset U$，由此 V 也是有界的，作相应于 V 的 Minkowski 泛函 $p_V(x)$，因 V 是 0 的环境，所以 $p_V(x)$是 E 上的连续拟范数。

下面证明 E 上的拓扑$\mathscr{T}$是由 $p_V(x)$导出的，类似于定理 4 的证明可知道，由 $p_V(x)$导出的拓扑$\mathscr{T}'\subset\mathscr{T}$。另一方面，设$W$是 E 中的任一 0 的环境，由于 V 是有界的，V 被W所吸收，故必存在正数 δ，使 $\delta V\subset W$，于是

$$\{x\,|\,p_V(x)<\delta\}\subset\delta V\subset W,$$

由此知$\mathscr{T}\subset\mathscr{T}'$，即得$\mathscr{T}=\mathscr{T}'$。

最后还需证明$p_V(x)$是范数。如果$p_V(x)=0$。因0的任何环境必包含一个$\{x|p_V(x)<\varepsilon\}$，但这个集包含x点，故此时0的任何环境都包含x，由于E满足T_0公理也一定满足T_1公理，从而推得$x=0$，即$p_V(x)$是范数。证毕。

§10　完全有界集和有限维线性拓扑空间

可以把距离空间中的完全有界集的概念引入到线性拓扑空间，甚至更一般的一致性空间。

定义　设E是线性拓扑空间，A为E的子集，V是E中0的环境，如果存在有限个$x_1, \cdots, x_n\in E$，使

$$A\subset\bigcup_{\nu=1}^{n}(x_\nu+V).$$

则称$x_1, \cdots, x_n$为A的有限V网。如果对于E中0的任何环境V，A都有有限V网，则称A是完全有界集。

容易看出，如果在上述定义中限制$x_1, \cdots, x_n\in A$，则定义是等价的。当E是线性距离空间，而且ρ是E上的不变距离时，则子集A按上述定义的完全有界性同按距离ρ定义的完全有界性是一致的。

完全有界集也称为准紧的(precompact)，可以证明E的子集A为完全有界集的充要条件是：A中的每一个定向点列(net)x_α必存在基本的子定向点列。如果E是分离的线性拓扑空间，记E的完备化扩张为$\widetilde{E}$，则$A\subset E$是完全有界的充要条件是：A在$\widetilde{E}$中的闭包是紧集，即A是$\widetilde{E}$中的相对紧集。

(Ⅰ)　线性拓扑空间中任何完全有界集A必是有界的。

证　设U是0的任一环境，则必存在0的均衡环境V，使得$V+V\subset U$，对于V，因为A是完全有界集，故必存在A的有限V网$x_1, x_2\cdots, x_n$。再选取$0<\delta\leqslant1$，使

$$|\lambda|\leqslant\delta\text{ 时}\Longrightarrow\lambda x_\nu\in V\quad(\nu=1, 2, \cdots, n).$$

因此 $\lambda A\subset\lambda\bigcup_{\nu=1}^{n}(V+x_\nu)=\bigcup_{\nu=1}^{n}(\lambda V+\lambda x_\nu)\subset\bigcup_{\nu=1}^{n}(V+V)\subset U$。

即知U吸收A，因而A是有界的。证毕。

反之，有界集不一定是完全有界的。

(II) 完全有界集A的闭包$\overline{A}$必是完全有界的。

证 设U是0的任一环境，取0的均衡环境V，使$V+V\subset U$；根据A是完全有界集，取$x_1, \cdots, x_n\in E$，使$A\subset\bigcup_{\nu=1}^{n}(x_\nu+V)$。则由$\overline{A}\subset A+V$知

$$\overline{A}\subset A+V\subset\bigcup_{\nu=1}^{n}(x_\nu+V)+V\subset\bigcup_{\nu=1}^{n}(x_\nu+U)\text{。}$$

所以$\overline{A}$是完全有界集。

(III) 设E是线性拓扑空间，A是E中的子集，如果对于0的每个环境V，存在E中的完全有界集C_V，使$A\subset C_V+V$。则A是完全有界的。

证 设U是0的任一环境，取0的环境V，使$V+V\subset U$。对于V，根据假定，存在一个完全有界集C，使$A\subset C+V$。因为C是完全有界的，所以存在有限V网$\{x_1, \cdots, x_n\}$，使

$$A\subset C+V\subset\bigcup_{\nu=1}^{n}(x_\nu+V)+V\subset\bigcup_{\nu=1}^{n}(x_\nu+U)\text{。}$$

所以A是完全有界的。

(IV) 完全有界集的子集是完全有界集。

(V) 设A、B是完全有界集，则下述诸集：$A\cup B$、$A+B$、λA都是完全有界集。

证 在此仅证明$A+B$是完全有界的。设U是0的任一环境，取0的环境V，使得$V+V\subset U$。由于A、B是完全有界集，存在有限个点组成的集合F_1、$F_2\subset E$，使得

$$A\subset F_1+V,\ B\subset F_2+V,$$

则

$$A+B\subset F_1+V+F_2+V\subset(F_1+F_2)+U\text{。}$$

而F_1+F_2是有限点集，所以$A+B$是完全有界的。

下面先引进一些概念：

设E是线性空间，A是任一非空子集，则$B=\{\alpha x \mid |\alpha|\leqslant 1, x\in A\}$是包含$A$的最小均衡集合，称为$A$的均衡包。

A的均衡凸包是包含A的最小的均衡凸集。通常用记号ΓA表示集A的均衡凸包。容易验证

$$\Gamma A=\{t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n \mid \sum_1^n|t_i|\leqslant 1, x_i\in A\}.$$

用$\Gamma_\alpha A_\alpha$表示一族集合$\{A_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$的并集的均衡凸包。

如果E是线性拓扑空间，类似地可考虑子集A的凸闭包和均衡凸闭包的概念。

（Ⅵ）设E是局部凸线性拓扑空间，那末E中完全有界集A的均衡凸闭包是完全有界的。

证　设V是0的任一均衡凸环境，因为A是完全有界的，故必存在有限点集F，使得$A\subset F+V$；

记ΓA表示A的均衡凸包，则$\Gamma A\subset\Gamma F+V$。

因ΓF是有限维空间中的紧集，故必定是完全有界的，由（Ⅲ）可知ΓA是完全有界集；再由（Ⅱ）可知A的均衡凸闭包是完全有界的。

下述定理更一般地适用于一致性空间。

定理1　线性拓扑空间E的子集A是紧的充要条件为：集A是完全有界的，并且是完备的。

证　必要性是显然的。只要证充分性：如果一个集族中每有穷多个集的交是不空的，则称这个集族为联族（或称中心族）。设$\mathscr{F}$是由A的子集组成的一个联族，如果能够证明$\mathscr{F}$在A中有公共接触点，即知A是紧集。我们知道任何联族$\mathscr{F}$必包含在一个极大联族$\mathscr{F}_*$中，而且$\mathscr{F}_*$具有如下性质：设$C\subset A$，并且C与$\mathscr{F}_*$中每个集相交，则$C\in\mathscr{F}_*$；又如果$B_1, B_2, \cdots, B_n\in\mathscr{F}_*$，则$B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_n\in\mathscr{F}_*$。在$\mathscr{F}_*$中规定顺序如下：

$$\text{当 } B、C\in\mathscr{F}_*,\ \text{且 } B\subset C\Longleftrightarrow C\leqslant B.$$

那末$\mathscr{F}_*$是定向半序集。事实上，如果$B、C\in\mathscr{F}_*$，则$B\cap C\in\mathscr{F}_*$，且

$$B \leqslant B \cap C, C \leqslant B \cap C.$$

对每个集 $C \in \mathscr{F}_*$，任取 C 中的一点，记为 x_C，这样便得到一个半序点列 $\{x_C, C \in \mathscr{F}_*\}$。现在来证明这是一个基本定向点列。事实上，对 0 的任一环境 U，取 0 的均衡环境 V，使

$$V + V \subset U.$$

对于 V，存在 $x_1, \cdots, x_n \in A$，使 $A \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} (x_\nu + V)$。这时必有一个 ν，使 $x_\nu + V$ 和 $\mathscr{F}_*$ 中的每一个集合相交。不然的话，对每个 ν，存在 $C_\nu \in \mathscr{F}_*$，使得 $(x_\nu + V) \cap C_\nu = \emptyset (\nu = 1, 2, \cdots, n)$。则必然有

$$\bigcap_{\nu=1}^{n} C_\nu = \left(\bigcup_{\nu=1}^{n} (x_\nu + V)\right) \cap \left(\bigcap_{\nu=1}^{n} C_\nu\right) = \emptyset.$$

这和 $\mathscr{F}_*$ 是联族的假设相矛盾。因此，有某一个 $x_\nu + V$ 和 $\mathscr{F}_*$ 的一切集相交，再由 $\mathscr{F}_*$ 的极大性可知 $x_\nu + V \in \mathscr{F}_*$，因此当 $x_\nu + V \leqslant C$，$x_\nu + V \leqslant C'$ 时，有

$$x_C - x_{C'} \subset C - C' \subset (x_\nu + V) - (x_\nu + V) \subset V - V \subset U.$$

这说明了 $\{x_C, C \in \mathscr{F}_*\}$ 是基本定向点列，由于 C 是完备的，故存在 $x_0 \in A$，使 $\lim x_C = x_0$。

下面证明 x_0 是 $\mathscr{F}_*$ 中集的公共接触点。设 V 是 0 的任一环境，存在 $C \in \mathscr{F}_*$，使当 $C' \in \mathscr{F}_*$ 且 $C \leqslant C'$ 时，$x_{C'} \in x_0 + V$，即知 $x_0 + V$ 和 C' 相交。然而对每个 $B \in \mathscr{F}_*$，有 $B \cap C \in \mathscr{F}_*$，$C \leqslant B \cap C$。因此 $B \cap C$ 和 $x_0 + V$ 相交，即 $\mathscr{F}_*$ 中每个集 B 都和 $x_0 + V$ 相交。因此，x_0 是 $\mathscr{F}_*$ 的公共接触点。证毕。

系 在完备的局部凸线性拓扑空间中，一个完全有界集的均衡凸闭包是紧的。

证 由性质(VI)和定理即得。

如果局部凸线性拓扑空间不完备，则紧集的均衡凸闭包是完全有界集，但不必是紧的。下面的定理指出比紧性较弱的条件即能推得完全有界性。

集 A 为可数紧的是指：从 A 的任一可数开覆盖可以取出有穷子覆盖。在拓扑空间中，所谓点 x_0 是 A 的积集点是指：由集 $A \setminus \{x_0\}$ 中的点可作一个半序点列收敛于 x_0。从而，如果 E 是分离的线性

拓扑空间，子集 A 为可数紧的充要条件是：A 中任何无穷点集必有一个属于 A 的积集点。

定理 2 设 E 是分离的线性拓扑空间，A 是 E 的子集，如果 A 是相对可数紧的，则 A 必是完全有界的。特别是，E 的可数紧的完备子集是紧集。

证 设 U 是 0 的任一均衡环境，可以证明 A 有有限 U 网。在 A 中任取 $x_1\in A$，如果 $A\subset x_1+U$，则 x_1 即是 A 的 U 网。否则，取 $x_2\in A\setminus(x_1+U)$。$x_2\overline{\in}(x_1+U)$，…，这样，在 A 中可如上选取元 x_n，使 $x_n\overline{\in}(x_i+U)(i=1,\ \cdots,\ n-1)$。如果这样的 x_n 只能取出有限个，那末 $A\subset\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}+U$，即 A 具有有限 U 网。否则，可找到至少可列个 $x_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ 满足上述性质。但是 A 是相对可数紧的，A 中点列 $\{x_n\}$ 在 E 中有积集点 y，取 0 的均衡环境 V，使

$$V-V\subset U,$$

因 y 是积集点，$y+V$ 中必包含 $\{x_n\}$ 中的无限个点，取一点 $x_M\in y+V$，由于 E 是分离的，必存在 0 的均衡环境 V_1，使 $x_M\overline{\in}y+V_1$。令 $W=V_1\cap V_2$，则对 y 的环境 $y+W$，必有 $x_N\in\{x_n\}$，使 $N>M$，且 $x_N\in y+W\subset y+V$。由此 $x_M\neq x_N$，但是

$$x_N-x_M\in(y+V)-(y+V)=V-V\subset U.$$

即 $x_N\in x_M+U$。这与 $\{x_n\}$ 的选取相矛盾。所以满足上述条件的 x_n 只能取到有限个，A 有有限 U 网，从而 A 是完全有界的。

后一个结论由定理 1 即可知。证毕。

下面讨论有限维线性拓扑空间：

我们知道 n 维线性空间如果赋以欧几里得距离，则称为欧几里得空间。n 维欧几里得空间是一个线性拓扑空间，下面的定理表明分离的 n 维线性拓扑空间本质上是欧几里得空间。

定理 3（有限维线性拓扑空间的唯一性定理） 设 E 是分离的线性拓扑空间，F 是 E 的有限维子空间，则 F 必同构于有限维欧氏空间。因此，F 必是完备的，从而是 E 中的闭集。

证 设 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 是 F 的 Hamel 基，则 F 中的每一个元 x

可唯一地表示为 $x=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$。作 n 维欧氏空间和 F 间的一一对应。

$$T: (a_1, \cdots, a_n) \mapsto x=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

因 F 是线性拓扑空间，映照 T 是连续的，下面将证明 T^{-1} 是连续的。从而 T 是 n 维欧氏空间和 F 间的拓扑同构。

现在证明 T^{-1} 的连续性，用归纳法：设 F 的维数为 1，$\{x_1\}$ 是 F 的基，于是 $T(a)=ax_1$，T^{-1} 是 F 上的线性泛函。其 0 空间为 $\{0\}$，根据 E 的分离性，$\{0\}$ 是闭集，所以 T^{-1} 是连续的，即 $n=1$ 时得证。设维数 $n=k$ 时命题成立。如果 $n=k+1$，T^{-1}: $x=\sum_{i=1}^{k+1} a_i x_i \mapsto (a_1, \cdots, a_{k+1})$。由于 F 上的每个极大线性子空间必是 k 维的，由归纳假定，它同构于 k 维欧氏空间，是 E 中闭集。而 F 上的线性泛函其 0 空间是极大线性子空间，所以是闭的。因此，F 上的线性泛函必定连续。特别是，线性泛函

$$f_i: x \mapsto a_i \quad (i=1, 2, \cdots, k+1)$$

是连续的。所以 T^{-1} 是连续的。证毕。

推论 设 F 是分离的线性拓扑空间 E 的有限维子空间；G 是 E 的闭线性子空间，则 $F+G$ 是 E 的闭线性子空间。

证 作商拓扑空间 E/G，因 G 是闭线性子空间，所以 E/G 是分离的线性拓扑空间。令

$$\theta: E \to E/G$$

是典型映照，则 $F+G$ 在 θ 映照下的像 $\theta(F)$ 是 E/G 中的有限维子空间。根据定理 3，它是 E/G 中的闭集，故 $F+G=\theta^{-1}(\theta(F))$ 是 E 中的闭集。证毕。

由于有限维欧氏空间的连通性，可得到如下定理：

定理 4 每一个线性拓扑空间是连通的。

证 不妨设 E 是分离的线性拓扑空间，那末 E 中的每一点 x 必和 0 点连通。事实上，作连接 0 和 x 的直线 $F=\{\alpha x, -\infty<\alpha<\infty\}$，$F$ 是 E 的一维子空间，根据定理 3，它拓扑同构于欧氏空间，

所以是连通的。证毕。

有限维子空间的拓扑补子空间：

设X是分离的线性拓扑空间，Y是X的线性子空间，如果X的子空间Z满足这样的条件：$Y\oplus Z$到X上的线性映照

$$T: y\oplus z\mapsto y+z$$

是拓扑同构映照，则称Z为Y的拓扑补子空间。

引理 1 X的线性子空间Y存在拓扑补子空间的充要条件是：存在一个连续线性映照$P: X\to X$，满足

$$P^2=P, \tag{1}$$

$$R(P)=\{Px \mid x\in X\}=Y, \tag{2}$$

或

$$\operatorname{Ker} P=\{x\in X \mid Px=0\}=Y. \tag{3}$$

证 必要性：如果$X\cong Y\oplus Z$，则X到Y（或到Z）的投影映照P满足本引理中的条件(1)，(2)(或(1)，(3))。

充分性：设P是满足(1)(2)的映照，那末

$Q=I-P$是满足(1)(3)的连续线性映照，从而清楚地有$R(Q)=\operatorname{Ker} P$以及$\operatorname{Ker} Q=R(P)$，设$Z=\operatorname{Ker}P$，由等式

$$I=P+Q$$

说明了$X\to Y\oplus Z$间的映照$x\mapsto Px\oplus Qx$是一个拓扑同构映照。在另一方面，只要交换P和Q即可同样证得。证毕。

如果X是Hilbert空间，则X的每个闭线性子空间Y都有拓扑补子空间$Y^{\perp}$，即是Y的正交补子空间。对于一般的Banach空间的闭子空间，可以没有拓扑补子空间，但是当Y是有限维或co-有限维子空间时，有以下定理：

定理 5 设X是赋范线性空间（或一般的局部凸线性拓扑空间），则X的每一个有限维子空间Y都有拓扑补子空间。

证 设$(e_1, \cdots, e_n)$是Y的一组Hamel基，Y中的元素可表为$y=\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_n e_n$，那末系数$\alpha_j$可以看作$Y$上的连续线性泛函：$y\mapsto\alpha_j$。按泛函延拓定理，把$Y$上的连续线性泛函$\alpha_j$延拓为$X$上的连续线性泛函$\tilde{\alpha}_j$ $(j=1, 2, \cdots, n)$，定义

$$Px=\sum_{j=1}^{n}\tilde{\alpha}_j(x)e_j \quad (x\in X),$$

则 P 是 $X\to Y$ 的连续投影，根据引理 1，Y 存在拓扑补子空间。证毕。

定理 6 设 X 是线性拓扑空间，则 X 的每一个 co–有限维的闭线性子空间 Y 有拓扑补子空间。

证 设 Z 是 Y 的任一代数补子空间，根据假设，Y 是 co–有限维的，所以 Z 是有限维的。作商空间 X/Y，是分离的有限维线性拓扑空间，则可定义 X/Y 到 Z 上的连续线性映照

$$T: \ Y+z\mapsto z, \quad z\in Z,$$

其中 $Y+z$ 表示 X/Y 中的元，它可以唯一地用 Z 中的元表示。由于两边都是有限维的，故连续性是明显的。从而复合映照

$$P: X\to X/Y\to Z$$

是 X 到 Z 的连续投影，满足引理 1 所要求的条件。证毕。

注 如果 X 是一般的线性拓扑空间，那末甚至有限维线性子空间的拓扑补子空间也可能不存在。

有限维线性拓扑空间的特征：

定义 设 E 是线性拓扑空间，如果存在一个 0 的环境是完全有界的，则称 E 是局部完全有界的。如果存在一个 0 的环境是紧的，则称 E 是局部紧的。

显然，局部紧的线性拓扑空间是局部完全有界的；局部完全有界的线性拓扑空间是局部有界的。

定理 7 设 X 是分离的线性拓扑空间，则 X 是有限维的充要条件是：X 是局部完全有界的。

证 必要性：由有限维欧氏空间是局部紧的，即得证。

充分性：设 X 中 0 的环境 V 是完全有界的，因为 $\frac{1}{2}V$ 也是 0 的环境，所以必存在有限个元 $x_1, \cdots, x_m$，使

$$V\subset\{x_1, \cdots, x_m\}+\frac{1}{2}V.$$

设 Y 是由 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 张成的有限维线性子空间，由归纳法知

道，对每个 n，有 $2^nV\subset Y+V$。因为 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}2^nV$，故有 $X=Y+V$。假定 $X\neq Y$，则 $X/Y\neq\{0\}$，必包含一个一维子空间。另一方面，如果记 $X\to X/Y$ 的典型映照为 θ，因为 V 是完全有界集，而 θ 是连续的，所以 $\theta(V)$ 是 X/Y 中的完全有界集。由于 $X=Y+V$，所以必须有 $\theta(V)=\theta(X)$。这就说明 $\theta(V)$ 必包含一个一维子空间，这与 $\theta(V)$ 是完全有界集相矛盾。所以必有 $X=Y$，X 是有限维的。证毕。

习 题 一

1. 设 E 是一个向量空间，$\mathscr{T}$ 是 E 上的一个拓扑，如果使映照 $(x, y)\mapsto x+y$，$(a, x)\mapsto ax$ 分别对每个变量为各别连续的，并且分别在 $E\times E$ 中的 $(0, 0)$ 点及 $K\times E$ 中的 $(0, 0)$ 点处连续。试证明 $\mathscr{T}$ 是 E 上的向量拓扑。

2. 设 E 是线性拓扑空间。$S\subset E$。试证明对每个 $a\in\bar{S}$ 存在 S 中的定向点列 $\{x_\alpha, \alpha\in\mathscr{N}\}$，使 $x_\alpha\to a$，其中足标集 $\mathscr{N}$ 为 0 的一组环境基按 $\subset$ 定向（即指如 $U\subset V$，则规定序关系 $U>V$，$\mathscr{N}$ 按此序关系成为定向半序集）。

3. 设线性空间 $E\neq\{0\}$。试证明 E 上的离散拓扑不是向量拓扑。

4. 证明线性空间上总存在最强的向量拓扑，它是所有向量拓扑的上端。

5.* 设 E 是无限维线性空间。试证明由 E 中所有均衡吸收集所组成的集族不是 E 上的向量拓扑的局部基。

（设 $\{e_i, i=1, 2, \cdots\}$ 是线性独立集，令 $A_n=\Sigma\{a_i e_i \mid |a_i|\leqslant\frac{1}{n}, i=1, 2, \cdots, n\}$，$A=\bigcup_{n\in N}A_n$。如果 B 是由 A 所张成子空间的补子空间，则不存在均衡吸收集 C，使 $C+C\subset A+B$。）

6. 设 $p(x)$ 是线性空间 E 上的拟范数，试举例说明：E 上使 $p(x)$ 连续的最弱拓扑可以不是向量拓扑（例如取 $E=R$，$p(x)=|x|$）。

7. 设 E 是线性空间。试证明 E 中均衡凸吸收集全体构成向量拓扑的局部基。所对应的向量拓扑是 E 上的最强局部凸向量拓扑。

8. Box 拓扑：设 $\{E_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$ 是非零、分离线性拓扑空间的无限族，记 $F=\Pi\{E_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$；又设 $\mathscr{V}$ 是集合 $\Pi\{V_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$ 的全体组成的集族，其中 V_α 是 E_α 中 0 的环境。试证明 $\mathscr{V}$ 不是 F 上向量拓扑的局部基。

9. 设线性空间E上的子集族$\mathscr{U}$满足下述条件：

(i) $\mathscr{U}$中每个U是中点凸(即$U+U\subset 2U$)的均衡吸收集；

(ii) 对任意两个U_1、$U_2\in\mathscr{U}$，存在$U_3\in\mathscr{U}$，使$U_3\subset U_1\cap U_2$；

(iii) 对每个$U\in\mathscr{U}$，存在$V\in\mathscr{U}$，使$2V\subset U$。

试证明：$\mathscr{U}$是E上向量拓扑的局部基。

10. 设Φ是线性空间E上的向量拓扑集合，$S\subset E$。试证明：S是$(E, \bigvee\Phi)$中有界集的充要条件是：对于每个$T\in\Phi$，S是(E, T)中的有界集。

11. 设$p(x)$是线性拓扑空间E上的连续拟范数。试证明$p(x)$在每个有界集上有界。

12. 证明线性拓扑空间中的有界线性子空间S必含于$\{0\}^-$中，特别是，分离的线性拓扑空间的有界子空间只有$\{0\}$。

13. 设F是线性拓扑空间E的子空间。集$S\subset F$。试证明S是F中有界集的充要条件为：S是E中的有界集。

14. 设$\{E_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$是一族线性拓扑空间，作乘积拓扑空间$E=\Pi\{E_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$。试证明$E$中的子集$S$是有界的充要条件为：$S$在每个$E_\alpha$上的投影是有界集。特别是$\Pi\{S_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$是有界集的充要条件为：每个$S_\alpha$分别是$E_\alpha$中的有界集。

15. 设E是线性拓扑空间，并且$E'=E^*$。试证明E中的每个收敛序列从而每个有界集是有限维的。

16. 证明线性拓扑空间中有限点集的凸包是有界集。

17. 证明线性拓扑空间中的点集是有界的充要条件为：它的每个可数子集是有界的。

18. 设E是完备的线性拓扑空间，如线性拓扑空间F与E同构。试证明F也是完备的。

19. 设$\{E_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$是一族线性拓扑空间。试证明$\Pi\{E_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$是完备的充要条件为：每个$E_\alpha$是完备的。

20. 设$\{x_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$是线性拓扑空间$E$中的点列。如果对每个$U\in\mathscr{N}(E)$，存在$\delta\in\mathscr{A}$，使当$\alpha>\beta>\delta$时，$x_\alpha-x_\beta\in U$，试问$x_\alpha$是不是基本点列？

21. 在线性拓扑空间E中，如果存在一个0的环境是完备的集合。试证明E是完备的。

22. 设T和T'是线性空间E上的两个向量拓扑，S在(E, T)和(E, T')中是完备子集。试指出：S看作$(E, T\vee T')$中的集合不一定是完备的(如在线性空间E上给定两个范数$\|\cdot\|$和$\|\cdot\|_1$，使$(E, \|\cdot\|)$和$(E, \|\cdot\|_1)$均是

Banach 空间，但是 $\|\ \|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 不等价，则$(E, \|\cdot\|+\|\cdot\|_1)$不是完备的。）

23. 证明 l_1 关于弱拓扑是序列完备但不是完备的。

24. 证明如两个向量拓扑有相同的收敛序列，则必有相同的基本序列（$\{x_n\}$ 是基本的充要条件为：对于所有自然数子序列 $\{\nu_n\}$ 与 $\{\mu_n\}$，$x_{\nu_n}-x_{\mu_n}\to 0$）。

25. 设E是线性拓扑空间，$F=\{0\}^-$，G是F的任一代数补子空间。试证明E在G上的导出拓扑是分离的，且E拓扑同构于 $G\times F$，其中F上取平凡拓扑。

26. 证明在上题中E是完备的充要条件是：对应的分离线性拓扑空间G是完备的。

27. 证明分离的线性拓扑空间的乘积拓扑空间是分离的。

28. 设 $f: E\to F$ 是满的线性映照，对于E上的向量拓扑，总可以在F上导出一个商拓扑，使得 f 是连续的，同时，又是开的映照。试举例说明E上的不同向量拓扑可以在F上导出同一个商拓扑（例如在 R^2 中令 $p_1(x)=|x_1|+|x_2|$，$p_2(x)=|x_1|$，则 p_1，p 在 R^2 中定义两个不同的向量拓扑，设 $f(x)=x_1$ 即可）。

29. 证明每个 $E_{\alpha'}$ 是 $\prod E_\alpha$ 的商拓扑空间。

30. 证明一族线性拓扑空间$\{E_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$的乘积拓扑空间是可赋拟范的（指拓扑可用一个拟范数给定）充要条件是：其中仅有有限个空间是可赋拟范的，其余的取平凡拓扑。

31. 证明每个无限维的赋准范空间上总存在不连续的线性泛函。（设$\{x_n\}$是一列线性无关的向量，取 $t_n>0$，使 $\|t_n x_n\|<\frac{1}{n}$，令 $f(t_n x_n)=1$。）

32. 证明线性拓扑空间中的极大子空间或是稠密的或是闭的。

33. 设E是线性拓扑空间。试证明 $E'=E^*$ 的充要条件是：E 中每个线性子空间是闭的。

34. 设H是线性空间E的 Hamel 基，对于每个 $x\in E$ 可以表为 $x=\sum_{i=1}^{n} a_i h_i$（其中 $h_i\in H$；$a_i\in K$）。定义

$$p(x)=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^{\frac{1}{2}}\ (x\in E).$$

证明 $p(x)$是E上的赋准范。如果定义 $q(x)=\sum_{i=1}^{n}|a_i|$，则 $q(x)$ 是一个范数，从而每个线性空间上都可以定义范数。

35. 设E是完备的线性距离空间，G是E的子空间，如果G是E中的G_δ集(即可列个开集的交)。试证明G必是闭的。

36. $l^p(0<p<1)$是满足$\sum\limits_1^\infty |x_n|^p<\infty$的点列$x=(x_1, x_2, \cdots)$全体组成的线性空间，赋以$p$-范数$\|x\|_p=\sum\limits_1^\infty |x_n|^p$。令$e_k=(\overbrace{0, \cdots, 0}^{k-1}, 1, 0\cdots)$。试证明$\{e_k\}$是$l^p$中的有界集，但是它的凸包不是有界集。

37. 证明到线性拓扑空间F的每个连续线性映照在0的一个环境上有界的充要条件为：F是局部有界的。

38. 试说明第一章§8例1中的空间$\mathfrak{S}$不是局部有界的(设$U(\varepsilon)=\{f| \|f\|<\varepsilon\}$，$\|f\|=\int_0^1\frac{|f(t)|}{1+|f(t)|}dt$，如$\delta<\varepsilon$，则$U(\delta)$不吸收$U(\varepsilon)$)。

39. 设线性拓扑空间E是第二纲的。试证明下述条件等价：

a) E是局部有界的；

b) E是可列个有界集的并集；

c) E中有界集全体具有可数基本子集族。

40. 设E是赋准范空间。E中级数$\sum x_n$称为绝对收敛的，如果$\sum\|x_n\|<\infty$。试证明E是完备的充要条件为：绝对收敛级数是收敛的。

41.* 线性拓扑空间中每个序列闭凸体必是闭集。但对于凸集来说，结论一般是错的。

42. 证明凸集的内点全体是凸的。

43. 证明每一个 Frechet 空间不可能有由可数无限多个元组成的 Hamel 基(利用有限维子空间是闭的)。

44. 设S是 Banach 空间E的可补子空间，$\{f_n\}\subset S'$，且对每个$x\in S$，$f_n(x)\to 0$。试证明每个f_n能延拓为$g_n\in E'$，且对每个$x\in E$，$g_n(x)\to 0$(设$g_n=f_n\cdot P$，其中P是E到S的投影)。

45. 证明对于任一赋范空间E，存在投影P：$E'''\to E'$，并且$\|P\|=1$(对$F\in E'''$，定义$f\in E'$。$f(x)=F(\hat{x})$，$P: F\mapsto f$)。

46. 设 Banach 空间E和一个 Banach 空间的共轭空间同构(线性同胚)。试证明E在E''中是可补的。

47. 证明从分离的有限维线性拓扑空间到任一线性拓扑空间F的线性映照是连续的。

48. 设E是有限维线性拓扑空间，$f\in E^*$，如果f在$\{0\}^-$上为0。试证明$f\in E'$。

49．证明一个集是完全有界集的充要条件是：它的每个可数子集是完全有界集。

50．设$\{x_\nu\}$是不收敛的基本点列，则$\{x_\nu\}$是闭的完全有界集，但不是紧集。

51．证明一个可数紧子集是完全有界的。

52．设$C[0,1]$是$[0,1]$上实值连续函数全体组成的线性空间，对$[0,1]$中有限点集F，令$U_{F,\varepsilon}=\{f \mid |f(x)|<\varepsilon,\ x\in F\}$，则集族$\{U_{F,\varepsilon} \mid \varepsilon>0,\ F\subset[0,1],\ F$是有限点集$\}$构成$C[0,1]$上局部凸向量拓扑的局部基，对应的拓扑称为*点点收敛拓扑*。试证明$C[0,1]$关于点点收敛拓扑不满足第一可列公理。

53．设线性拓扑空间E上（例如$L^p[0,1]$，$0<p<1$）不存在任何不恒为零的连续线性泛函，则E的任何有限维子空间不存在拓扑补子空间。

54.*Eberlein定理 Banach空间E中每个弱可数紧子集是弱紧的和弱序列紧的。试证明之。

第二章　局部凸线性拓扑空间

局部凸线性拓扑空间理论是线性拓扑空间理论中最重要的部分。由于在局部凸空间上存在足够多的连续线性泛函，这就使得线性拓扑空间的性质，特别是数乘运算有了充分的运用，得到了许多结果。线性拓扑空间理论的主要成就差不多都是和局部凸线性拓扑空间相联系的。

线性拓扑空间中局部凸环境和连续线性泛函的联系是很自然的。在本章§2中，我们将看到存在这样的线性拓扑空间：其上不存在非0的连续线性泛函。设$(E, \mathscr{T})$是线性拓扑空间，f是E上非0的连续线性泛函，则由f的连续性可知，均衡凸集$E(|f|\leqslant\varepsilon)$是$E$中0的凸环境。这说明了如果$E$上存在非0的连续线性泛函，则必存在$E$中凸的真子集作为0的环境。在§3中可知道，如果$E$上存在一个不为整个$E$的0点的凸环境，则必存在非0的连续线性泛函。

对于每一个线性拓扑空间$(E, \mathscr{T})$，总可在E上导出一个局部凸拓扑$\mathscr{T}'$，使得$(E, \mathscr{T})$和$(E, \mathscr{T}')$有相同的连续线性泛函。事实上，如设$(E, \mathscr{T})$中0的均衡凸环境全体为$\mathscr{U}$，那末$\mathscr{U}$满足如下条件：

(a) $\mathscr{U}$中每个集合是均衡凸集，且是吸收的；

(b) $\mathscr{U}$中任意两集的交$U\cap V\in\mathscr{U}$；

(c) 对于每个$U\in\mathscr{U}$及数$a\neq0$，有$aU\in\mathscr{U}$。

于是，以$\mathscr{U}$作为0点的局部基可以唯一地在E上决定一个局部凸向量拓扑$\mathscr{T}'$。$\mathscr{T}'$称为由向量拓扑$\mathscr{T}$导出的局部凸向量拓扑。很清楚，$\mathscr{T}'$是弱于$\mathscr{T}$的最强局部凸向量拓扑。下面证明$(E, \mathscr{T}')$和$(E, \mathscr{T})$上有相同的连续线性泛函。事实上，因为$\mathscr{T}'$

$\subset\mathscr{T}$，每个$\mathscr{T}'$连续线性泛函必$\mathscr{T}$连续。反过来，如果E上线性泛函f是$\mathscr{T}$连续的，那末$E(|f|\leqslant 1)$是0的$\mathscr{T}$拓扑环境，因为它是均衡凸的，由定义可知，它也是0的$\mathscr{T}'$拓扑环境，所以f也是$\mathscr{T}'$连续的。

§1　局部凸线性拓扑空间

设E是线性空间，$\{p_\alpha(x),\ \alpha\in\mathscr{A}\}$是$E$上给定的一族拟范数，由第一章§9可知道，由这族拟范数可以导出E上的向量拓扑如下：

任取$\varepsilon>0$和$\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\in\mathscr{A}$，作集

$$U(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \varepsilon)=\{x\,|\,p_{\alpha_\nu}(x)<\varepsilon,\ \nu=1,\ \cdots,\ n\},$$

这些集的全体记为$\mathscr{V}$，则由$\mathscr{V}$作为局部基唯一确定E上一个向量拓扑，称为由拟范数族$\{p_\alpha,\ \alpha\in\mathscr{A}\}$导出的*局部凸向量拓扑*。相反地，任一局部凸向量拓扑可以由一族拟范数导出，因此对局部凸线性拓扑空间可引入下述等价定义：

定义　在线性空间E上，赋以由一族拟范数$\{p_\alpha(x),\ \alpha\in\mathscr{A}\}$导出的拓扑，称为*局部凸线性拓扑空间*，或简称为*局部凸空间*。

如果用S表示拟范数族$\{p_\alpha,\ \alpha\in\mathscr{A}\}$，则相应的局部凸线性拓扑空间可记作$(E,\ S)$；相应的局部凸向量拓扑也称为*S-拓扑*，容易看出，E中的点列$x_\nu\to x$的充要条件是：对于每一个$p\in S$，有

$$p(x_\nu-x)\to 0.$$

(1)　线性空间E上由$\{p_\alpha,\ \alpha\in\mathscr{A}\}$决定的局部凸向量拓扑是分离的充要条件为：如果$x\neq 0$是$E$中的任一非0元，那末

$$\sup_{\alpha\in\mathscr{A}} p_\alpha(x)>0. \tag{1}$$

证　设(1)式满足，如果$x\neq y$，则$x-y\neq 0$，根据(1)，必存在$\alpha_0\in\mathscr{A}$，使得$p_{\alpha_0}(x-y)=3d>0$，如果令$V=\{x\,|\,p_{\alpha_0}(x)\leqslant 1\}$，则$x$的环境$x+dV$和$y$的环境$y+dV$彼此分离，即满足$T_2$公理。充分性得证。

反之，如果存在某个 $x\neq 0$，而对每个 $\alpha\in\mathscr{A}$，有 $p_\alpha(x)=0$，则 x 包含在 0 的每个环境中，所以不是分离的，必要性得证。

(II) 设 S 是 E 上的一族拟范数，将相应的局部凸空间记为 (E,S)，E 上的拟范数 $q(x)$ 关于 S-拓扑连续的充要条件是：存在有限个拟范数 $p_1,\cdots,p_m\in S$ 和正数 $c_1,\cdots,c_m$，使

$$q(x)\leqslant c_1p_1(x)+\cdots+c_mp_m(x)\quad(x\in E).\tag{2}$$

证 充分性：如果(2)式成立，当 (E,S) 中的点列 $x_\nu\to x$ 时，由

$$|q(x_\nu)-q(x)|\leqslant q(x_\nu-x)$$
$$\leqslant c_1p_1(x_\nu-x)+\cdots+c_mp_m(x_\nu-x)$$

可知道，当 ν 充分大时，上式右端可以任意小，所以当 $x_\nu\to x$ (关于 S-拓扑)时，$q(x_\nu)\to q(x)$，$q(x)$ 是 (E,S) 上的连续拟范数。

必要性：设 $q(x)$ 关于 S-拓扑连续，则必存在 0 的环境

$$U(p_1,\cdots,p_m,\varepsilon)=\{x\,|\,p_i(x)<\varepsilon,\ p_i\in S,\ i=1,2,\cdots,m\},$$

使

$$x\in U(p_1,\cdots,p_m,\varepsilon)\Longrightarrow q(x)<1,$$

那末，如取 $c_j=\dfrac{1}{\varepsilon}$，必有

$$q(x)\leqslant c_1p_1(x)+\cdots+c_mp_m(x).$$

事实上，如果 $q(x)=0$，上式自然成立；如果 $q(x)\neq 0$，令

$$y=\frac{x}{q(x)},$$

因为 $q(y)=1$，所以 $y\bar{\in}U(p_1,\cdots,p_m,\varepsilon)$，从而必对某个 j，使 $p_j(y)\geqslant\varepsilon_j$，故

$$1\leqslant c_1p_1(y)+\cdots+c_mp_m(y).$$

上式两边同乘以 $q(x)$，即得(2)。证毕。

由(II)说明在局部凸线性拓扑空间中，由连续拟范数全体决定的拓扑和拟范数族 S 所决定的拓扑是一致的。如果在某局部凸空间 E 上给定一族拟范数 S，使对每一个连续拟范数 $q(x)$ 都存在 $p_1,\cdots,p_m\in S$ 及 $c_i>0(i=1,2,\cdots,m)$ 使式(2)成立，则称这样的拟范数族 S 为 E 上连续拟范数的一个子基。如果再把要求加强

一点，使对每个连续拟范数 $q(x)$，存在某个 $p(x)\in S$ 及正数 c，使 $q(x)\leqslant cp(x)$，则称拟范数族 S 为 E 上连续拟范数的一个基。

容易知道，如果 E 是线性空间，一族拟范数 S 能成为 E 上某局部凸向量拓扑的一个基的充要条件是：对任何 p_1、$p_2\in S$，必存在 $p_3\in S$ 及 $\lambda>0$，使得

$$p_1(x)\leqslant\lambda p_3(x) \quad 及 \quad p_2(x)\leqslant\lambda p_3(x).$$

如果 S 是局部凸空间 E 上连续拟范数的一个子基，则 E 中 0 点的局部基可由下述集合的全体给定：

$$U(p_1, p_2, \cdots, p_m, \varepsilon)=\{x\,|\,p_i(x)<\varepsilon,\ i=1, \cdots, m\},$$

其中 $p_1, \cdots, p_m\in S$，E 中任一点 x 的环境基可以由上述 0 的环境基经平移 x 后而得到。如果 S 是局部凸空间 E 中的连续拟范数基，则 E 中 0 的局部基可以由下述集合全体给定：

$$U(p, \varepsilon)=\{x\,|\,p(x)<\varepsilon\},$$

其中 $p(x)\in S$，$\varepsilon>0$。

同时容易知道，局部凸空间上所有连续拟范数所对应的单位球 $V_p=\{x\,|\,p(x)\leqslant 1\}$ 构成 0 点的环境基，由（II）还可知道在局部凸空间上拟范数 $q(x)$ 是连续的充要条件为 q 所对应的单位球 V_q 是 0 的环境。

设 E 是局部凸空间，S 是 E 上的一个连续拟范数子基，则 E 按下述集合的全体为邻，成为一致性空间：

$$\{(x, y)\in E\times E\,|\,p_i(x-y)<\varepsilon,\ i=1, \cdots, n\},$$

其中 $p_1, \cdots, p_n\in S$，$\varepsilon>0$。

如果一个线性空间上有两个局部凸拓扑，则可以按照下面的定理比较拓扑的强弱。

定理 1　设 E 是线性空间，A、B 是 E 上的二族拟范数，E 上由 A（或 B）导出的向量拓扑称为 A-拓扑（相应地，B-拓扑），则 A-拓扑比 B-拓扑弱的充要条件是：对每个 $q\in A$，必存在 $p_1, \cdots, p_m\in B$ 及正数 $c_1, \cdots, c_m$，使得下式

$$q(x)\leqslant c_1p_1(x)+\cdots+c_mp_m(x)$$

对一切 $x\in E$ 成立。

上述充要条件还可等价地表达为：对于每个 $q\in A$，必存在 $p_1, \cdots, p_m\in B$ 及 $c>0$，使

$$q(x)\leqslant c\max(p_1(x), \cdots, p_m(x)) \tag{3}$$

对一切 $x\in E$ 成立。

证 可由(II)证得。

系 设 E 是线性空间，A、B 是 E 上的两族拟范数，则这两族拟范数导出同一局部凸向量拓扑的充要条件是：对每个 $q\in A$，存在 $p_1, \cdots, p_m\in B$ 及 $c>0$，使(3)式成立，同时对每个 $p\in B$，存在 $q_1, \cdots, q_n\in A$ 及 $c'>0$，使

$$p(x)\leqslant c'\max(q_1(x), \cdots, q_n(x))$$

对一切 $x\in E$ 成立。

(III) 设 E 是局部凸空间，则定向点列 x_ν 是基本定向列的充要条件是：对 E 上每一个连续拟范数 $p(x)$，有

$$p(x_\mu-x_\nu)\to 0. \tag{4}$$

如果 S 是 E 上的连续拟范数子基，那末只要对每一个 $p(x)\in S$，(4)式成立即可。

证 必要性：对任给的 $\varepsilon>0$ 以及任一连续拟范数 $p(x)$，设

$$U=\{x\in E\,|\,p(x)<\varepsilon\},$$

则 U 是 0 的环境，如果 x_ν 是基本定向列，则必存在 ν_0，使当

$$\mu, \nu\geqslant\nu_0\Longrightarrow x_\mu-x_\nu\in U$$

时，即有 $p(x_\mu-x_\nu)<\varepsilon$，因此 $p(x_\mu-x_\nu)\to 0$。

充分性可以直接验证。最后，当 S 是 E 上的一个连续拟范数子基时，如果(4)式对 S 中的拟范数成立，那末根据(II)，(4)式对一切连续拟范数均成立，所以(III)中后一结论成立。证毕。

对于局部凸空间，同样地可以定义完备性、序列完备以及有界完备等概念。类似于第一章§5定理2，可有下述重要结论：

定理 2 设线性空间E上有两个局部凸向量拓扑，它们分别是用拟范数族 S 和 T 定义的，假定对于每一个 $p\in S$，关于 T-拓扑是连续的，同时对于每一个 $q\in T$，关于 S-拓扑是下半连续的(序列下半连续)。如果集 $A\subset E$ 关于 S-拓扑是完备的(序列完备的)，则

A 关于 T-拓扑必定是完备的(序列完备)。

证　考虑到下半连续拟范数的单位球必是闭集，结论可由第一章§5定理2得到。下面直接给以证明。

设 $x_\nu \in A$ 是关于 T-拓扑的基本定向列，因为 S-拓扑弱于 T-拓扑，所以 x_ν 也是关于 S-拓扑的基本定向列，根据条件，A 关于 S-拓扑是完备的，x_ν 必按 S-拓扑收敛于 $x\in A$。

由 x_ν 是 T-拓扑基本定向列，对于任一 $q\in T$ 及 $\varepsilon>0$，存在 ν_0 使

$$\mu、\nu\geqslant\nu_0 \Longrightarrow q(x_\nu - x_\mu)\leqslant\varepsilon. \tag{5}$$

由于 q 关于 S-拓扑下半连续，(5)式按 S-拓扑，对 x_μ 取极限，则当 $\nu\geqslant\nu_0$ 时，必有

$$q(x_\nu - x)\leqslant \varliminf q(x_\nu - x_\mu)\leqslant\varepsilon.$$

即 x_ν 按 T-拓扑也收敛于 $x\in A$，A 关于 T-拓扑是完备的。关于序列完备的情形，可类似证明。证毕。

对于有界完备，有类似的结论。

局部凸空间的完备化空间：

设局部凸空间 E 上的拓扑由拟范数族 $\{p_\alpha,\ \alpha\in\mathscr{A}\}$ 导出，设 N_α 是 $p_\alpha(x)$ 的零空间，令

$$E_\alpha=\frac{E}{N_\alpha},$$

若记 $\hat{x}_\alpha$ 为 x 在 E_α 中对应的等价类，那末 E_α 按范数

$$\hat{p}_\alpha(\hat{x}_\alpha)=p_\alpha(x) \tag{6}$$

是一个赋范空间。记 $\widetilde{E}_\alpha$ 为 E_α 的完备包，$\hat{p}_\alpha$ 可连续延拓到 $\widetilde{E}_\alpha$ 上，仍记作 $\hat{p}_\alpha$。从而 $(\widetilde{E}_\alpha,\ \hat{p}_\alpha)$ 是一个 Banach 空间，作 Banach 空间 $\widetilde{E}_\alpha$ 的乘积空间

$$F=\prod_{\alpha\in\mathscr{A}}\widetilde{E}_\alpha, \tag{7}$$

根据第一章§6，可知道 F 是完备的。下面建立 E 到 F 中的映照

$$\varphi: x\mapsto\hat{x}=(\hat{x}_\alpha).$$

如果 E 是分离的，则 φ 是 E 到 F 的线性子空间 $\hat{E}$ 上的一一映照。F

上的乘积拓扑是由拟范数族 $\hat{p}_\alpha(\hat{x})=\hat{p}_\alpha(\hat{x}_\alpha)\quad(\alpha\in\mathscr{A})$导出的。由于(6)，$p_\alpha(x)=\hat{p}_\alpha(\hat{x}_\alpha)=\hat{p}_\alpha(\hat{x})\quad(x\in E)$。所以 φ 是局部凸空间 E 到 F 的线性子空间 $\hat{E}$ 上的拓扑同构。因为 F 是完备的，所以 E 是完备的充要条件为 $\hat{E}$ 是 F 中的闭集。

定理 3 设 E 是分离的局部凸空间，那末 E 拓扑同构于 Banach 空间的乘积空间 F 的线性子空间 $\hat{E}$，$\hat{E}$ 在 F 中的闭包 $\tilde{E}$ 即是 E 的一个完备包，$\tilde{E}$ 在拓扑同构意义下唯一确定。同时 E 的任一组局部基在 $\tilde{E}$ 中的闭包组成 $\tilde{E}$ 中 0 的环境基。

证 根据上面的叙述，$\tilde{E}$ 是 E 的一个完备包。由完备化的一般定理可知道 $\tilde{E}$ 在拓扑同构意义下是唯一的。

下面证明最后的结论：设 $\{U_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$ 是 E 中 0 的由开环境组成的环境基，则可证 U_α 在 $\tilde{E}$ 中的闭包 $\overline{U}_\alpha$ 的全体是 $\tilde{E}$ 中 0 的环境基。由于拓扑同构，我们对 E 和 $\hat{E}$ 不加区别，把 E 看作 $\tilde{E}$ 的子空间。对于每个开集 $U_\alpha\subset E$，必存在 $\tilde{E}$ 中 0 的开环境 $\tilde{U}_\alpha$，使得

$$U_\alpha=\tilde{U}_\alpha\cap E.$$

因为 $\tilde{U}_\alpha$ 是开集，且 E 在 $\tilde{U}_\alpha$ 中是稠密的，所以 U_α 在 $\tilde{U}_\alpha$ 中是稠密的，由此推得 $\overline{U}_\alpha\supset\tilde{U}_\alpha$，$\overline{U}_\alpha\supset\overline{\tilde{U}}_\alpha$。又因 $U_\alpha\subset\tilde{U}_\alpha$，总有 $\overline{U}_\alpha\subset\overline{\tilde{U}}_\alpha$，所以 $\overline{U}_\alpha=\overline{\tilde{U}}_\alpha$，$\overline{U}_\alpha$ 是 $\tilde{E}$ 中 0 的环境。反过来，设 $\tilde{V}$ 是 $\tilde{E}$ 中 0 的任一闭环境，那末 $V=\tilde{V}\cap E$ 是 E 中 0 的环境，取适当的 $U_\alpha\subset V$，则

$$\overline{U}_\alpha\subset\overline{V}\subset\tilde{V},$$

所以 $\{\overline{U}_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$ 是 $\tilde{E}$ 中 0 的一个环境基。如果 $\{V_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$ 是 E 中任一个局部基，那末对任一 V_α 能找到 $U_{\alpha'}\subset V_\alpha$，对任一 U_α 能找到 $V_{\alpha'}\subset U_\alpha$。所以由 $\overline{U}_{\alpha'}\subset\overline{V}_\alpha$ 与 $\overline{V}_{\alpha'}\subset\overline{U}_\alpha$ 即知 $\{\overline{V}_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$ 是 $\tilde{E}$ 中 0 的环境基。证毕。

系 局部凸空间的完备包也是局部凸线性拓扑空间。

下面讨论局部凸空间之间线性映照的连续性。

定理 4 设 X 和 Y 是局部凸空间，T 是 $X\to Y$ 的线性映照，则下述条件是等价的：

(a) T 在某点 $x_0\in X$ 连续；

(b) T 在 X 上一致连续；

(c) 对于 Y 上每一个连续拟范数 q, $q(Tx)$ 是 X 上的连续拟范数。

证　(c)$\Longrightarrow$(b)$\Longrightarrow$(a)是平凡的。

(a)$\Longrightarrow$(c)：设 T 在 $x_0 \in X$ 点连续，q 是 Y 上的任一连续拟范数，则 Tx_0+V_q 是 Tx_0 点的环境，因此

$$T^{-1}(Tx_0+V_q)=x_0+\{x \mid q(Tx)\leqslant 1\}$$

是 X 中 x_0 的环境，由此即知 $\{x \mid q(Tx)\leqslant 1\}$ 包含某连续拟范数 p 的单位球 V_p，所以拟范数 $q(Tx)$ 的单位球是 0 的环境，$q(Tx)$ 是 X 上的连续拟范数。证毕。

如果 S 和 T 分别是 X 和 Y 上的连续拟范数子基，则定理 4 中 (c)等价于(c)′。

(c)′ 对每一个 $q\in T$，必存在有限个 $p_1, \cdots, p_m \in S$ 及正数 $c_1, \cdots, c_m$，使 $q(Tx)\leqslant c_1p_1(x)+\cdots+c_mp_m(x)$ 对每一个 $x\in X$ 成立。

容易知道，从线性拓扑空间 X 到线性拓扑空间 Y 的连续线性映照的全体，按通常的加法和数乘是一个线性空间。

设 X、Y 是局部凸空间，如果 T 是 X 到 Y 上的线性映照，又是拓扑同胚映照，则称 T 是 X 到 Y 上的同构映照；而称局部凸空间 X 和 Y 是同构的。

设 X、Y 是两个同构的局部凸空间，T 是同构映照，那末 T 和 T^{-1} 都是连续线性映照，由此推得 X 上的拟范数 $p(x)$ 是连续的充要条件是：$q(y)=p(T^{-1}y)$ 是 Y 上的连续拟范数，所以由同构映照 T 导出了 X 和 Y 上的连续拟范数之间的一一对应。类似地，X 中定向列 x_τ 是基本定向列的充要条件为：Tx_τ 是 Y 中的基本定向列，因此 X 中点集 A 是完备的充要条件为：$T(A)$ 是 Y 中的完备集。

如果 X、Y 是赋范空间，T 是 $X\to Y$ 上的一一线性映照，那末 T 是同构映照的充要条件为：存在常数 $c>0$，使

$$c^{-1}\|x\|_X\leqslant\|Tx\|_Y\leqslant c\|x\|_X \quad (x\in X).$$

特别地，如果 $\|x\|_1$ 和 $\|x\|_2$ 是向量空间 X 上的两个范数，则它们在 X 上定义相同的局部凸拓扑的充要条件为：存在 $c>0$，使

$$c^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c\|x\|_1 \quad (x \in X)$$

这时称范数 $\|x\|_1$ 与 $\|x\|_2$ 是等价的。

对于局部凸空间中的有界集有下述特征：

(IV) 设 E 是局部凸空间，拓扑由拟范数族 S 导出，集 $A \subset E$ 是有界的充要条件为对每一个 $p(x) \in S$，有

$$\sup_{x \in A} p(x) < \infty.$$

(V) 设 E 是局部凸空间，A 是 E 中的有界集，则 A 的均衡凸闭包仍是有界集。

证 设 A 的均衡凸闭包为集 B，U 是 0 的任一环境，因为 E 是局部凸的，必存在 0 的均衡凸闭环境 $V \subset U$，因为 A 是有界的，必存在 δ，使得

$$|\lambda| < \delta \Longrightarrow \lambda A \subset V,$$

从而当 $|\lambda| < \delta$ 时，

$$\lambda B \subset V \subset U,$$

即知 B 是有界的。证毕。

这里需要指出：对于非局部凸线性拓扑空间，(V) 的结论不一定成立，在 §3 中将给出这样的例子。

定义 设 X 是局部凸空间，如果具有这样的性质：X 上的任一拟范数 $p(x)$ 如果在每一个有界集上有界从而可推得 $p(x)$ 是连续的，则称局部凸空间 X 为囿空间(或有界型空间)。

定理 5 设 X 是囿空间，Y 是局部凸空间，如果线性映照 T：$X \to Y$ 是有界的，则 T 必定连续。

证 设 $q(y)$ 是 Y 中的任一拟范数，则 $q(Tx)$ 是 X 中的拟范数，由 T 的有界性可知 $q(Tx)$ 在 X 的每个有界集上有界，因为 X 是囿空间，由囿空间的假设可知 $q(Tx)$ 是 X 上的连续拟范数，根据定理 4 即可知道 T 是 X 到 Y 的连续映照。证毕。

定理 5 可看作赋范空间情形的推广。

定理 6 赋可列拟范空间是囿空间。

证 设局部凸空间 X 上的拓扑由可列个拟范数

$$\{p_n(x), n=1, 2, \cdots\}$$

给出，不妨假设

$$p_1(x) \leqslant p_2(x) \leqslant \cdots \leqslant p_n(x) \leqslant \cdots \quad (x \in X).$$

事实上，如果不是这样，可令 $p_n'(x) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i(x)$，则由定理 1，

$$\{p_n'(x), n=1, 2, \cdots\}$$

决定的拓扑和由 $\{p_n(x), n=1, 2, \cdots\}$ 决定的拓扑是一致的，只要以 $\{p_n'\}$ 代替原来的 $\{p_n\}$ 即可。

设 $q(x)$ 是 X 上的一个拟范数，它在 X 的每个有界集上有界，即对任一有界集 A，有

$$\sup_{x \in A} q(x) < \infty.$$

今证必有自然数 n 和正数 c，使

$$q(x) \leqslant c p_n(x) \quad (x \in X), \tag{8}$$

不然的话，对每个自然数 n，必有元素 $x_n \in X$，使得 $p_n(x_n) = 1$，而

$$q(x_n) > n, \tag{9}$$

由于对任何自然数 m，有下式成立：

$$\sup_{n \geqslant 1} p_m(x_n) \leqslant \max\{p_m(x_1), p_m(x_2), \cdots, p_m(x_{m-1}), 1\}.$$

$\{x_n\}$ 是 X 中的有界集，然而，根据(9)，$\sup\limits_{n \geqslant 1} q(x_n) = \infty$，这和 q 的假设有矛盾。故必有某自然数 n 使(8)式成立，从而 $q(x)$ 是 X 上的连续拟范数，这就证明了 X 是囿空间。

定义　设 X 是局部凸空间，如果 X 上每个下半连续拟范数是连续的，则称 X 为桶式空间。

定理 7　局部凸 Frechet 空间是桶式空间。

证　设 X 是局部凸 Frechet 空间（也称(F)空间），$p(x)$ 是 X 上的下半连续拟范数，则

$$V_p = \{x \mid p(x) \leqslant 1\}$$

是 X 中的闭集。容易知道 $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (nV_p)$。因为 X 是完备距离空间，故是第二纲的。由此，至少有一个集，例如 nV_p 包含一个内点，因此 V_p 也包含某内点，又因为 V_p 是均衡凸的，容易知道 0 点必

是 V_p 的内点。从而 $p(x)$ 在 0 的某环境上有界，$p(x)$是连续的。这就证明了 X 是桶式空间。

§2 赋可列拟范空间

设 E 是线性空间，$\{\|x\|_n; n=1, 2, \cdots\}$ 是 E 上的一列拟范数，则 E 按这列拟范数导出的局部凸拓扑称为赋可列拟范空间。

一个局部凸空间 E 是赋可列拟范空间的充要条件为 E 上存在由可列个连续拟范数组成的子基。

定理 1 设 E 是线性拓扑空间，则 E 是可赋可列拟范的充要条件为：E 满足第一可列公理，而且是局部凸的。

证 设 E 是满足第一可列公理的局部凸空间；

$$\{U_n; n=1, 2, \cdots\}$$

是 E 中 0 的一列环境组成的环境基，由第一章 §9 引理 1 可知，局部凸空间中均衡凸环境组成 0 的环境基。取均衡凸环境 $V_n \subset U_n$，则 $\{V_n, n=1, 2, \cdots\}$ 是 0 的环境基。对每一个 V_n，相应地有一个 Minkowski 泛函，这里用 $\|x\|_n$ 表示，则根据第一章 §9 定理 4 可知，E 上局部凸拓扑可由可列拟范数族 $\{\|x\|_n; n=1, 2, \cdots\}$ 导出。即 E 是赋可列拟范空间。

反之，如果 E 是赋可列拟范空间，其上的拓扑由

$$\{\|x\|_n; n=1, 2, \cdots\}$$

导出，则下述集合的有限交

$$\left\{x \mid \|x\|_n < \frac{1}{m}\right\} \quad (m, n=1, 2, \cdots)$$

组成 0 的基本环境组，所以 E 满足第一可列公理。证毕。

对于赋可列拟范空间 E，正如在 §1 定理 6 的证明中所指出的，对于其上可列个拟范数 $\|x\|_n$，不妨假定满足条件：

$$\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \cdots \leqslant \|x\|_n \leqslant \cdots, \tag{1}$$

今后考察赋可列拟范空间时，总假定其上拟范数列满足条件(1)。这时，容易知道 0 的环境基可取为

$$U_n=\left\{x \,\middle|\, \|x\|_n<\frac{1}{n}\right\} \quad (n=1, 2, \cdots)。 \tag{2}$$

如果E是分离的局部凸空间，由定理1和第一章§8中的定理2可知E是可赋可列拟范的充要条件为E可以距离化。对于赋可列拟范空间，可以通过E上给定的拟范数列$\{\|x\|_n; n=1, 2, \cdots\}$直接把$E$上的不变距离写出来：

$$\rho(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\|x-y\|_k}{1+\|x-y\|_k}。$$

由于$\rho(x, y)=0$的充要条件是对一切k，$\|x-y\|_k=0$，又因E是分离的，所以$x=y$，由此易知ρ是E上的不变距离。下面证明由ρ导出的拓扑和由拟范数列$\{\|x\|_n, n=1, 2, \cdots\}$导出的拓扑是一致的。记$O(x_0, a)=\{x\,|\,\rho(x, x_0)<a\}$，$\{U_n\}$是如(2)式所表示的$E$中0的环境基，从而有

$$O\left(0, \frac{1}{(n+1)2^n}\right)\subset U_n\subset O\left(0, \frac{1}{n+1}+\frac{1}{2^n}\right) \quad (n=1, 2, \cdots)$$

所以ρ导出的拓扑和原拓扑是一致的。

一些例子

例1 设$a>0$，令$K(a)$为直线上的适合条件

$$\varphi(x)=0, \quad |x|\geqslant a$$

的无限次可微函数的全体，按通常的函数加法和数与函数的乘法成为线性空间，对每个n，令

$$\|\varphi\|_n=\max_{\substack{|x|\leqslant a\\ 0\leqslant\nu\leqslant n}}|\varphi^{(\nu)}(x)| \quad (n=1, 2, \cdots),$$

其中$\varphi^{(\nu)}(x)$表示φ的ν次导函数，$\varphi^{(0)}(x)\equiv\varphi(x)$，则

$$\|\varphi\|_n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

是$K(a)$上的一列范数，而且$\varphi=0$的充要条件是：对一切n，$\|\varphi\|_n=0$，因此$K(a)$按范数列$\{\|\varphi\|_n, n=1, 2, \cdots\}$成为满足$T_0$公理的赋可列拟范空间。这就是广义函数论中所述及的支集在$[-a, a]$中的基本函数全体所成的基本函数空间，在$K(a)$中$\{\varphi_k\}$按拓扑收敛于0的充要条件是对每个n，$\|\varphi_k\|_n\to 0(k\to\infty)$也就是对每个$n$，有

$$\max_{|x|\leq a} |\varphi_k^{(n)}(x)| \to 0 \quad (k\to\infty);$$

即$\{\varphi_k\}$的各阶导函数在$[-a, a]$上均匀收敛于0。

对于高维空间上的基本函数空间也可作类似的描述。令R^k是k维实空间，当$x=(x_1, \cdots, x_k)\in R^k$时，令

$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_k^2)^{1/2}.$$

设$\nu=(\nu_1, \cdots, \nu_k)$是$k$个非负整数所成的序组，令

$$|\nu| = \nu_1 + \cdots + \nu_k,$$

记

$$D^\nu = \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_k}}{\partial x_1^{\nu_1}\cdots\partial x_k^{\nu_k}}.$$

设$a>0$，令$K^k(a)$为R^k上适合条件

$$\varphi(x)=0, \quad \|x\|\geq a$$

的无限次可微函数全体所成的线性空间，这时对每个n，令

$$\|\varphi\|_n = \max_{\substack{|x|<a\\ 0\leq|\nu|\leq n}} |D^\nu\varphi| \quad (n=1, 2, \cdots),$$

其中$D^0\varphi\equiv\varphi$，那末$K^k(a)$按$\{\|\varphi\|_n, n=1, 2, \cdots\}$成为满足$T_0$公理的赋可列拟范空间，而$\{\varphi_n\}$在$K^k(a)$中按拓扑收敛于0的充要条件是$\varphi_n$的各个偏导函数在$|x|\leq a$上均匀收敛于0。

例2 设U是复平面上的单位圆$\{z\,|\,|z|<1\}$，$A(U)$是U上的解析函数全体，对每个n作$A(U)$上的范数

$$\|\varphi\|_n = \max_{|z|\leq 1-\frac{1}{n}} |\varphi(z)| \quad (n=1, 2, \cdots),$$

则$A(U)$按$\{\|\varphi\|_n\, n=1, 2, \cdots\}$成为满足$T_0$公理的赋可列范空间，而且在$A(U)$中，$\{\varphi_k\}$按拓扑收敛于0的充要条件是$\{\varphi_k\}$在$|z|<1$中内闭地均匀收敛于0。

例3 设$C(-\infty, \infty)$是直线上的连续函数全体所组成的线性空间。当$\varphi\in C(-\infty, \infty)$时，规定

$$\|\varphi\|_n = \max_{|x|\leq n} |\varphi(x)|.$$

则$C(-\infty, \infty)$按拟范数列$\{\|\varphi\|_n, n=1, 2, \cdots\}$成为满足$T_0$公理的赋可列拟范空间，而$C(-\infty, \infty)$中$\{\varphi_k\}$按拓扑收敛于0的充要条件是$\{\varphi_k\}$内闭地均匀收敛于0。

下面讨论特殊的一类赋可列拟范空间，称为赋可列范空间。但是，不能照字面理解，以为赋可列范空间仅仅是把赋可列拟范空间中的拟范数换成范数，将在下面给出定义。这类空间在广义函数论中经常遇到，它是由 Гельфанд 等人引进的。

设 E 是线性空间，$\|\varphi\|$ 与 $\|\varphi\|'$ 是 E 上的两个范数，如果对于按 $\|\varphi\|$ 和 $\|\varphi\|'$ 都是基本的点列 $\{\varphi_m\}$，当 $\|\varphi_m\|\to 0$ 时，必有 $\|\varphi_m\|'\to 0$，与此同时，如果当 $\|\varphi_m\|'\to 0$ 时，必有 $\|\varphi_m\|\to 0$，则称 $\|\varphi\|$ 和 $\|\varphi\|'$ 是相容的。

例 4　$K(a)$ 上的任何两个范数 $\|\varphi\|_n$ 与 $\|\varphi\|_m$ 是相容的，事实上，如果 $n<m$，则 $\|\varphi\|_n\leqslant\|\varphi\|_m$。设 $\{\varphi_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ 是 $K(a)$ 中按 $\|\varphi\|_n$ 和 $\|\varphi\|_m$ 都是基本的点列。如果 $\|\varphi_k\|_m\to 0$ $(k\to\infty)$，由于 $\|\varphi\|_n\leqslant\|\varphi\|_m$，自然有 $\|\varphi_k\|_n\to 0 (k\to\infty)$。反之，如果 $\|\varphi_k\|_n\to 0$ $(k\to\infty)$，由于 $\{\varphi_k\}$ 按 $\|\varphi\|_m$ 是基本的，则必有 $[-a, a]$ 上具有 m 阶连续导函数的函数 φ，使得对一切 $\nu\leqslant m$，有

$$\max_{1\leqslant\nu\leqslant m}|\varphi_k^{(\nu)}-\varphi^{(\nu)}|\to 0\quad (k\to\infty)。\tag{2}$$

因此由 $\max\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n}|\varphi_k^{(\nu)}|\to 0 (k\to\infty)$ 可知道 $\max\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n}|\varphi^{(\nu)}|=0$，即 $\varphi=0$，因此由(2)得到 $\|\varphi_k\|_m\to 0$。

例 5　设 E 是$[0, 1]$上的多项式全体，在 E 上作

$$\|\varphi\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)|,$$

$$\|\varphi\|'=\max_n\left|\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right|.$$

则 $\|\varphi\|$ 和 $\|\varphi\|'$ 都是 E 上的范数，但不是相容的。事实上，令 $\varphi(t)$ 为$[0, 1]$上不恒为 0 的连续函数，但

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=0\quad (n=1, 2, \cdots),$$

则必存在一列多项式 $\{\varphi_m\}$ 在$[0, 1]$上一致逼近 φ，即

$$\lim_{m\to\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi_m(t)-\varphi(t)|=0。\tag{3}$$

因此 $\{\varphi_m\}$ 按范数 $\|\varphi\|$ 是基本的。由于 $\|\varphi\|'\leqslant\|\varphi\|$，当然 $\{\varphi_m\}$ 按 $\|\varphi\|'$ 也是基本的，由(3)可知

$$\lim_{m\to\infty}\max_{n}\left|\varphi_m\left(\frac{1}{n}\right)-\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right|=0.$$

因为 $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=0\ (n=1,2,\cdots)$，所以 $\|\varphi_m\|'\to 0$。但这时因为 $\varphi\neq 0$，所以 $\|\varphi_k\|$ 不趋于 0，说明 $\|\varphi\|$ 与 $\|\varphi\|'$ 不是相容的。

引理 1 设 E 是线性空间，$\|\varphi\|$ 和 $\|\varphi\|'$ 是 E 上的两个相容的范数，又设存在正数 c，使得

$$\|\varphi\|'\leqslant c\|\varphi\|,\ \varphi\in E. \tag{4}$$

设 $\tilde{E}$ 是 E 按 $\|\varphi\|$ 的完备化空间，则必然可以把 $\|\varphi\|'$ 唯一地延拓成 $\tilde{E}$ 上的范数。

证 由于 E 在 $\tilde{E}$ 中是稠密的，对于每个 $\varphi\in\tilde{E}$，必有 $\{\varphi_m\}\subset E$，使得 $\|\varphi_m-\varphi\|\to 0$。因为

$$|\|\varphi_m\|'-\|\varphi_l\|'|\leqslant\|\varphi_m-\varphi_l\|'\leqslant c\|\varphi_m-\varphi_l\|, \tag{5}$$

所以 $\{\|\varphi_m\|'\}$ 收敛，记

$$\|\varphi\|'=\lim_{m\to\infty}\|\varphi_m\|'. \tag{6}$$

则 $\|\varphi\|'$ 的意义与 $\{\varphi_m\}$ 的选取无关，事实上，如果 $\|\psi_m-\varphi\|\to 0$，$\psi_m\in E$，由(4)式可得到

$$|\|\psi_m\|'-\|\varphi_m\|'|\leqslant c\|\varphi_m-\psi_m\|.$$

因此 $\lim\|\varphi_n\|'=\lim\|\psi_n\|'$。由此特别可以知道当 $\varphi\in E$ 时，(6) 式中的 $\|\varphi\|'$ 和 E 上原来的范数是一致的，因为这时可取 $\varphi_m=\varphi$。

由(6)容易看出，$\|\varphi\|'$ 是 $\tilde{E}$ 上的拟范数，现在证明它是范数，如果 $\|\varphi\|'=0,\varphi\in\tilde{E}$，那末根据(5)，$\{\varphi_m\}$ 关于范数 $\|\cdot\|'$ 和 $\|\cdot\|$ 是基本的，而且根据 (6)，$\|\varphi_m\|'\to 0$，因此由范数 $\|\cdot\|'$ 和 $\|\cdot\|$ 相容的条件推得 $\|\varphi_m\|\to 0$，即得 $\|\varphi\|=0$，但是 $\|\cdot\|$ 是 $\tilde{E}$ 上的范数，所以 $\varphi=0$。证毕。

系 在引理 1 的假设下，E 按范数 $\|\cdot\|'$ 的完备化空间 $\tilde{E}'\supset\tilde{E}$。

证 设 $\tilde{E}$ 按 $\|\cdot\|'$ 的完备化空间为 $\tilde{E}'$，只要证明 E 在 $\tilde{E}'$ 中按范数 $\|\cdot\|'$ 是稠密集即可。由于 E 按 $\|\cdot\|$ 在 $\tilde{E}$ 中稠密，对于每个 $\varphi\in\tilde{E}$，存在 $\{\varphi_n\}\subset E$，使 $\|\varphi_n-\varphi\|\to 0$，由条件(4)知道，$\|\varphi_n-\varphi\|'\to 0$，即 E 按 $\|\cdot\|'$ 在 $\tilde{E}$ 中是稠密的，又 $\tilde{E}$ 按 $\|\cdot\|'$ 在 $\tilde{E}'$ 中是稠密的，

所以 E 按 $\|\cdot\|'$ 在 $\tilde{E}'$ 中是稠密的。证毕。

利用相容范数的概念引进赋可列范空间如下：

定义　设 E 是一线性空间，$\{\|\varphi\|_n, n=1, 2, \cdots\}$ 是 E 上的一列范数，不妨假设

$$\|\varphi\|_1 \leqslant \|\varphi\|_2 \leqslant \cdots \leqslant \|\varphi\|_n \leqslant \cdots,$$

如果对于每个 $n=1, 2, \cdots$，范数 $\|\cdot\|_n$ 和 $\|\cdot\|_{n+1}$ 是相容的，则称 E 是赋可列范空间。

根据定义，赋可列范空间一定是赋可列拟范空间。赋可列范空间按照由范数族 $\{\|\varphi\|_n, n=1, 2, \cdots\}$ 导出的拓扑成为一个满足第一可列公理的、分离的局部凸空间。

对于赋可列范空间 E，将 E 按范数 $\|\cdot\|_n$ 完备化成为 Banach 空间 E_n，按照引理 1 的系，可以取完备化空间 E_n，使得

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots \supset E, \tag{7}$$

而且 $\|\varphi\|_n$ 可以延拓到 E_n 上，使得在 E_n 上

$$\|\varphi\|_n \leqslant \|\varphi\|_{n+1}. \tag{8}$$

以后对于赋可列范空间 E，总是把 E 按 $\|\cdot\|_n$ 完备化成为 E_n，使得(7)和(8)式成立。

例 6　设 $K(a)$ 是例 1 中的空间，$\{\|\varphi\|_n, n=1, 2, \cdots\}$ 是例 1 中所述的一列范数，则 $K(a)$ 是赋可列范空间，对于每个自然数 n，令 $K_n(a)$ 是直线上的具有 n 次连续导函数，而且在 $|x|\geqslant a$ 为零的函数 φ 全体所成的线性空间。在 $K_n(a)$ 中仍然规定

$$\|\varphi\|_n = \max_{\substack{|x|<a \\ 0\leqslant p\leqslant n}} |\varphi^{(p)}(x)|,$$

则 $K_n(a)$ 按 $\|\cdot\|_n$ 成为 Banach 空间。下面再证明 $K(a)$ 在 $K_n(a)$ 中按 $\|\cdot\|_n$ 是稠密的。

事实上，如果 $\varphi \in K_n(a)$，令

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{c_m}\int_{|t|<\frac{a}{m}} \varphi\left(\frac{x-t}{1-1/m}\right) e^{-\frac{a^2}{a^2-m^2t^2}}\, dt,$$

其中

$$c_m = \int_{|t|<\frac{a}{m}} e^{-\frac{a^2}{a^2-m^2t^2}}\, dt.$$

当 $|x|\geqslant a$，$|t|\leqslant\frac{a}{m}$时，$\left|\frac{x-t}{1-\frac{1}{m}}\right|\geqslant\frac{a-\frac{a}{m}}{1-\frac{1}{m}}=a$，所以 $\varphi_m(x)=0$，即知 $\varphi_m(x)\in K(a)$。下面证明 $\|\varphi_m-\varphi\|_n\to0$。

事实上，当 $\nu\leqslant n$ 时，

$$|\varphi_m^{(\nu)}(x)-\varphi^{(\nu)}(x)|\leqslant\frac{1}{c_m\left(1-\frac{1}{m}\right)^\nu}\int_{|t|<\frac{a}{m}}\left|\varphi^{(\nu)}\left(\frac{x-t}{1-\frac{1}{m}}\right)\right.$$

$$\left.-\varphi^{(\nu)}(x)\right|e^{-\frac{a^2}{a^2-m^2t^2}}dt+|\varphi^{(\nu)}(x)|\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{m}\right)^\nu}-1\right).$$

由于 $\varphi\in K_n(a)$，所以当 $\nu\leqslant n$ 时，对任何 ε，存在 δ，使当 $|x-x'|<\delta$ 时，$|\varphi^{(\nu)}(x)-\varphi^{(\nu)}(x')|<\varepsilon$。记 $M=\max|\varphi^{(\nu)}(x)|$，同时取充分大的自然数 N，使当 $m\geqslant N$，$|x|\leqslant a$，$|t|\leqslant\frac{a}{m}$ 时，

$$\left|\frac{x-t}{1-\frac{1}{m}}-x\right|<\varepsilon.$$

因此当 $m\geqslant N$，$\nu\leqslant n$ 时，

$$|\varphi_m^{(\nu)}(x)-\varphi^{(\nu)}(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{\left(1-\frac{1}{m}\right)^\nu}+M\left(\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-\nu}-1\right).$$

由此易知当 $m\to\infty$ 时，$\|\varphi_m-\varphi\|_n\to0$。

因此 $K_n(a)$ 就是 $K(a)$ 按范数 $\|\cdot\|_n$ 的完备化空间，这时(7)式为

$$K_1(a)\supset K_2(a)\supset\cdots\supset K_n(a)\supset\cdots\supset K(a).$$

定理 2 设 E 是赋可列范空间，$\{\|\varphi\|_n, n=1,2,\cdots\}$ 是 E 上的范数。令 E_n 是 E 按 $\|\cdot\|_n$ 的完备化空间，并且适合(7)和(8)。则 E 是完备空间的充要条件为

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=E. \tag{9}$$

证 设(9)成立。如果 $\{\varphi_m\}$ 是 E 中的基本点列，则对于任何 n，下式成立：

$$\lim_{l,m\to\infty}\|\varphi_l-\varphi_m\|_n=0.$$

由于 E_n 是 E 按 $\|\cdot\|_n$ 的完备化空间，因此有 $\varphi^{(n)}\in E_n$，使

$$\lim_{l\to\infty}\|\varphi_l-\varphi^{(n)}\|_n=0. \tag{10}$$

由于 $E_n\supset E_{n+1}$，所以 $\varphi^{(n+1)}\in E_n$。又因为 $\|\varphi\|_n\leqslant\|\varphi\|_{n+1}$，

$$\begin{aligned}\|\varphi^{(n+1)}-\varphi^{(n)}\|_n&\leqslant\|\varphi_l-\varphi^{(n)}\|_n+\|\varphi_l-\varphi^{(n+1)}\|_n\\&\leqslant\|\varphi_l-\varphi^{(n)}\|_n+\|\varphi_l-\varphi^{(n+1)}\|_{n+1}\to 0,\end{aligned}$$

所以 $\varphi^{(n)}=\varphi^{(n+1)}(n=1,2,\cdots)$，故有 $\varphi^{(1)}=\varphi^{(2)}=\cdots=\varphi^{(n)}=\cdots$。记此元素为 φ，则 $\varphi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$，根据(9)，$\varphi\in E$，这时(10)式即为

$$\lim_{l\to\infty}\|\varphi_l-\varphi\|_n=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

因此 $\{\varphi_m\}$ 按 E 的拓扑收敛于 E 中的元 φ，所以 E 是完备的。

反之，如果 E 是完备的，任取 $\varphi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$，由于 E 在 E_n 中按 $\|\varphi\|_n$ 是稠密的，必有 $\varphi_n\in E$，使

$$\|\varphi-\varphi_n\|_n<\frac{1}{n}. \tag{11}$$

则对任何自然数 n，当 $l,m\geqslant n$ 时，

$$\begin{aligned}\|\varphi_l-\varphi_m\|_n&\leqslant\|\varphi-\varphi_l\|_n+\|\varphi-\varphi_m\|_n\\&\leqslant\|\varphi-\varphi_l\|_l+\|\varphi-\varphi_m\|_m<\frac{1}{l}+\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

所以对每个 n，$\lim\limits_{l,m\to\infty}\|\varphi_l-\varphi_m\|_n=0$，即 $\{\varphi_n\}$ 是 E 中的基本点列。由于 E 是完备的，必有 $\psi\in R$，使对一切 n，有

$$\lim_{l\to\infty}\|\varphi_l-\psi\|_n=0. \tag{12}$$

但由(11)得知

$$\begin{aligned}\|\psi-\varphi\|_n&\leqslant\|\psi-\varphi_l\|_n+\|\varphi-\varphi_l\|_n\\&\leqslant\|\psi-\varphi_l\|_l+\|\varphi-\varphi_l\|_n<\frac{1}{l}+\|\psi-\varphi_l\|_n,\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $l>n$，再由(12)得知 $\|\psi-\varphi\|_n=0$，所以 $\varphi=\psi\in E$，即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\subset E,$$

由(7)式即知(9)式成立。证毕。

我们注意到例 6 中显然有 $K(a)=\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n(a)$，所以 $K(a)$ 是完备的。

完备的赋可列范空间称为可列-Banach 空间。

定义 设 E 是线性空间，$\{(\varphi,\psi)_n,\ n=1,2,\cdots\}$ 是其上的一列内积，记 $\|\varphi\|_n=\sqrt{(\varphi,\varphi)_n}$，如果 E 按 $\{\|\varphi\|_n,\ n=1,2,\cdots\}$ 成为赋可列范空间，则称 E 按 $\{(\varphi,\varphi)_n,\ n=1,2,\cdots\}$ 为可列-内积空间。完备的可列-内积空间称为可列-Hilbert 空间。

例 7 设 $K(a)$ 为例 6 中的空间，但是规定一列内积

$$(\varphi,\psi)_n=\sum_{\nu=0}^{n}\int_{-a}^{a}\varphi^{(\nu)}(t)\overline{\varphi^{(\nu)}(t)}\,dt, \tag{14}$$

其中 $n=1,2,\cdots$。下面要证明 $K(a)$ 按 $\{(\varphi,\psi)_n,\ n=1,2,\cdots\}$ 是可列内积空间，记

$$\|\varphi\|_n=\sqrt{(\varphi,\varphi)_n}.$$

令 $K_n^{(2)}(a)$ 是直线上具有 $n-1$ 阶全连续导函数，又在 $|x|\geqslant a$ 中为 0，而且第 n 阶导函数平方可积的函数全体按通常的线性运算成为线性空间，在 $K_n^{(2)}(a)$ 上导入内积(14)。我们首先证明 $K_n^{(2)}(a)$ 按 $(\varphi,\psi)_n$ 成为 Hilbert 空间。如果 $\{\varphi_k\}$ 是 $K_n^{(2)}(a)$ 中的基本点列，那末

$$\int_{-a}^{a}|\varphi_k^{(n)}(x)-\varphi_l^{(n)}(x)|^2dx\leqslant\|\varphi_k^{(n)}-\varphi_l^{(n)}\|_n^2.$$

因此必有$[-a,a]$上可测的平方可积函数 ψ_n，使

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-a}^{a}|\varphi_k^{(n)}(x)-\psi_n(x)|^2dx=0.$$

规定当 $|x|\geqslant a$ 时，$\psi_n(x)=0$，作

$$\psi_{n-1}(x)=\int_{-\infty}^{x}\psi_n(t)dt.$$

则当 $x\leqslant -a$ 时，$\psi_{n-1}(x)=0$；而当 $x\geqslant a$ 时，

$$\psi_{n-1}(x)=\int_{-a}^{a}\psi_n(t)dt=\lim_{k\to\infty}\int_{-a}^{a}\varphi_k^{(n)}(t)dt=0.$$

又

$$\int_{-a}^{a}|\varphi_k^{(n-1)}(x)-\psi_{n-1}(x)|^2dx$$
$$=\int_{-a}^{a}\left|\int_{-a}^{x}(\varphi_k^{(n)}(t)-\psi_n(t))dt\right|^2dx$$
$$\leqslant(2a)^2\int_{-a}^{a}|\varphi_k^{(n)}(t)-\psi_n(t)|^2dt,$$

所以 $$\lim_{k\to\infty}\int_{-a}^{a}|\varphi_k^{(n-1)}(x)-\psi_{n-1}(x)|^2dx=0,$$

这样继续下去，得到函数

$$\psi(x)\in K_n^{(2)}(a),\ \psi^{(\nu)}(x)=\psi_\nu(x)\quad(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

而 $$\lim_{k\to\infty}\int_{-a}^{a}|\varphi_k^{(\nu)}(x)-\psi^{(\nu)}(x)|^2dx=0,$$

即 $$\|\varphi_k-\psi\|\to0(k\to\infty).$$

利用例 6 中的方法就得知 $K(a)$ 在$K_n^{(2)}(a)$ 中按 $K_n^{(2)}(a)$ 的范数是稠密的。换言之，$K_n^{(2)}(a)$ 是 $K(a)$ 按照 $(\varphi,\ \psi)_n$ 的完备化空间。

现在来证明 $K(a)$ 上 $\|\varphi\|_n$ 和 $\|\varphi\|_m$ 是相容的。事实上，如果 $n<m$，那末

$$\|\varphi\|_n\leqslant\|\varphi\|_m,\ \varphi\in K(a). \tag{15}$$

设 $\{\varphi_k\}\subset K(a)$，按 $\|\varphi\|_n$ 和 $\|\varphi\|_m$ 都是基本点列。根据 (15)，如果 $\|\varphi_k\|_m\to0\ (k\to\infty)$，自然有 $\|\varphi_k\|_n\to0(k\to\infty)$。反之，如果

$$\|\varphi_k\|_n\to0\quad(k\to\infty),$$

由于$\{\varphi_k\}$按 $\|\varphi\|_m$ 是基本的，必有 $\varphi\in K_m^{(2)}(a)$，使

$$\|\varphi_k-\varphi\|_m\to0\quad(k\to\infty). \tag{16}$$

根据 (15)，必须 $\|\varphi_k-\varphi\|_n\to0\ (k\to\infty)$，所以由 $\|\varphi_k\|_n\to0$ 得到 $\|\varphi\|_n=0$，即 $\varphi=0$。所以(16)即为 $\|\varphi_k\|_m\to0\ (k\to\infty)$。这样就证明了 $\|\varphi\|_m$ 和 $\|\varphi\|_n$ 是相容的。$K(a)$按 $\{(\varphi,\ \psi)_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ 是可列-内积空间，又显然有

$$K(a)=\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n^{(2)}(a).$$

由定理 2 可知道 $K(a)$ 按 $\{(\varphi,\ \psi)_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ 是可列-Hilbert 空间。

注意：$\{\|\varphi\|_n, n=1,2,\cdots\}$和例 6 中的$\{\|\varphi\|_n',\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$（这

里为区别起见，把例 6 中的 $\|\varphi\|_n$ 暂记为 $\|\varphi\|_n'$）在 $K(a)$ 上导出的拓扑是等价的。事实上，有

$$\int_{-a}^{a} |\varphi^{(\nu)}(x)|^2 dx \leqslant 2a \max_{-a\leqslant x\leqslant a} |\varphi^{(\nu)}(x)|^2,$$

$$|\varphi^{(\nu)}(x)|^2 \leqslant \left(\int_{-a}^{x} |\varphi^{(\nu+1)}(t)|dt\right)^2$$

$$\leqslant 2a\int_{-a}^{a} |\varphi^{(\nu+1)}(t)|^2 dt.$$

因此

$$\|\varphi\|_n \leqslant \sqrt{2(n+1)a}\, \|\varphi\|_n',$$

$$\|\varphi\|_n' \leqslant \sqrt{2a}\, \|\varphi\|_n.$$

由此 $\{\|\varphi\|_n\}$ 和 $\{\|\varphi\|_n'\}$ 在 $K(a)$ 上导出同一个拓扑。

§3 Hahn-Banach 定理和凸集的分离性定理

在线性拓扑空间中的 Hahn-Banach 定理是赋范线性空间情形的自然推广。我们知道在线性赋范空间上，由于 Hahn-Banach 定理通常也称为泛函延拓定理，保证了有足够多的连续线性泛函存在，然而在一般的线性拓扑空间上可能不存在任何非零的连续线性泛函，下面要指出在 $L^p[0,1](0<p<1)$上并不存在任何非零的连续线性泛函。正像赋范空间的情形一样，在线性拓扑空间理论中，Hahn-Banach 定理有着广泛的应用，它是线性拓扑空间的基本定理之一。

定义 设 $p(x)$ 是线性空间 E 上的泛函数，如果满足

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y) \quad (x, y\in E),$$

就称 $p(x)$ 是次可加的。如果对于每个实数 $\alpha>0$，有

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad (x\in E),$$

则称 $p(x)$ 为正齐次的。由第一章 §9 可知道，线性空间 E 上任一吸收凸集的 Minkowski 泛函为正齐次，次可加的。显然，凸泛函和拟范数都是正齐次，次可加泛函。

定理 1 设 E 是线性拓扑空间。如果 f 是 E 上的线性泛函，

则 f 连续的充要条件为：存在 E 上的连续凸泛函，使

$$|f(x)|\leqslant p(x),\quad x\in E. \tag{1}$$

证　如果 $f(x)$ 连续，就作出 $p(x)=|f(x)|$，则 (1) 式自然成立，反过来，如果(1)式成立，那末由 $p(x)$ 的连续性，存在 0 的均衡环境 U，使得当 $x\in U$ 时，$p(x)<1$，因此在 U 上 $f(x)$ 有界，即知 $f(x)$ 是连续的。证毕。

推论　如果 f 是 E 上的实线性泛函，而且有 E 上的连续凸泛函 $p(x)$，使得 $f(x)\leqslant p(x)$。则 $f(x)$ 是连续的。

设 E 是赋 p–范空间，$\|x\|_p$ 是 E 上的 p–范数，则 E 上的线性泛函 f 为连续的充要条件是

$$\|f\|=\sup_{\|x\|_p=1}|f(x)|<\infty. \tag{2}$$

事实上，如果 f 连续，则 f 在 0 的某环境上有界，由

$$\{x\,|\,\|x\|_p=1\}\subset\{x\,|\,\|x\|_p<2\}$$

就知道(2)式成立，反过来，如果 $\|f\|<\infty$，则当 $0<\|x\|_p<1$ 时，

$$|f(x)|=\|x\|_p^{\frac{1}{p}}\,f\left(\frac{x}{\|x\|_p^{\frac{1}{p}}}\right)\leqslant\|x\|_p^{1/p}\|f\|\leqslant\|f\|.$$

因此 $f(x)$ 在 $\{x\,|\,\|x\|_p<1\}$ 上有界，从而 f 是连续的，由(2)可得

$$|f(x)|\leqslant\|f\|\,\|x\|_p^{1/p}. \tag{3}$$

例 1　空间 $L^p[0,1]$ $(0<p<1)$ 上不存在任何非零连续线性泛函。

证　设 f 是 $L^p[0,1]$ 上的连续线性泛函，作函数

$$x_u(t)=\begin{cases}1, & t<u\\ 0, & t\geqslant u\end{cases}\quad(0\leqslant u\leqslant 1),$$

记 $f(x_u(t))=\varphi(u)$，则当 $u_1<u_2$ 时，

$$\begin{aligned}|\varphi(u_2)-\varphi(u_1)|&=|f(x_{u_2}(t)-x_{u_1}(t))|\leqslant\|f\|\cdot\|x_{u_2}-x_{u_1}\|_p^{1/p}\\&=\|f\|\left(\int_0^1|x_{u_2}-x_{u_1}|^p dt\right)^{1/p}\\&=\|f\|\cdot|u_2-u_1|^{1/p}.\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{1}{p}>1$，必须有 $\varphi(u)=\text{const}$。但是 $\varphi(0)=0$，所以 $\varphi(u)=0$，

也就是说 $f(x_n(t))=0$，然而 $x_n(t)$ 的线性组合全体在 $L^p[0,1]$ 中是稠密的，所以由 f 的连续性导出 $f\equiv 0$。

下面给出泛函延拓定理以及它的分析证明，这个证明和线性赋范空间的情况是相仿的。

定理 2(Hahn-Banach) 设 E 是实的线性空间，$p(x)$ 是 E 上的正齐次，次可加泛函，又设 $f(x)$ 是 E 的线性子空间 E_1 上的线性泛函，而且适合条件

$$f(x)\leqslant p(x),\quad x\in E_1. \tag{4}$$

则必然可以把 $f(x)$ 延拓成为 E 上的线性泛函 $\tilde{f}$，使得对于一切 $x\in E$，都有

$$\tilde{f}(x)\leqslant p(x)$$

成立。

证 令线性泛函 ψ 是 f 的一个延拓，而且在 ψ 的定义域 D_ψ 上有 $\psi(x)\leqslant p(x)$。令 $\mathscr{F}$ 是这种 ψ 全体所成的集，当 ψ_1 是 ψ 的延拓时，就规定 $\psi\prec\psi_1$。显然，$\mathscr{F}$ 是半序集。今证 $\mathscr{F}$ 的每个全序子集 $\mathscr{F}_1$ 必有上界，事实上，只要作出 $D=\bigcup\limits_{\psi\in\mathscr{F}_1}D_\psi$，由 $\mathscr{F}_1$ 的全序性容易知道 D 是 E 的线性子空间，作出 D 上的泛函 u 如下：当 $x\in D$ 时，有 $\psi\in\mathscr{F}_1$，使 $x\in D_\psi$。令 $u(x)=\psi(x)$。由 $\mathscr{F}_1$ 的全序性容易证明这样的 u 有确定的意义，而且 $u\in\mathscr{F}$。显然，u 是 $\mathscr{F}_1$ 的上界。再由 Zorn 引理可以知道 $\mathscr{F}$ 必有极大元，把它记作 $\tilde{f}$。现在来证明 $\tilde{f}$ 的定义域 $\mathfrak{M}$ 是全空间。

用反证法证明：如果 $\mathfrak{M}\neq E$，取 $x_0\in E\setminus\mathfrak{M}$，设 $\mathfrak{M}'$ 为由 x_0 和 $\mathfrak{M}$ 张成的线性子空间。因为当 $y',y''\in\mathfrak{M}$ 时，

$$\begin{aligned}\tilde{f}(y')-\tilde{f}(y'')=\tilde{f}(y'-y'')&\leqslant p(y'-y'')\\&\leqslant p(y'+x_0)+p(-y''-x_0).\end{aligned}$$

因此

$$-p(-y''-x_0)-\tilde{f}(y'')\leqslant p(y'+x_0)-\tilde{f}(y').$$

令

$$m=\sup_{y\in\mathfrak{M}}\{-p(-y-x_0)-\tilde{f}(y)\};$$

$$M=\inf_{y\in\mathfrak{M}}\{p(y+x_0)-\tilde{f}(y)\}.$$

则 $-\infty<m\leqslant M<\infty$，任取 c_0 使 $m\leqslant c_0\leqslant M$。

作 $\mathfrak{B}'$ 上的泛函 f' 如下：当 $x\in\mathfrak{B}'$ 时，有唯一的实数 t 和唯一的 $y\in\mathfrak{B}$，使 $x=y+tx_0$。我们规定

$$f'(y+tx_0)=\tilde{f}(y)+tc_0.$$

显然 f' 是 $\mathfrak{B}'$ 上的线性泛函，而且是 $\tilde{f}$ 的延拓。今证

$$f'(x)\leqslant p(x),\quad x\in\mathfrak{B}'. \tag{5}$$

事实上，当 $x=y+tx_0$，$y\in\mathfrak{B}$，$t>0$ 时，

$$\begin{aligned}f'(x)&=\tilde{f}(y)+tc_0\leqslant\tilde{f}(y)+tM\\&\leqslant\tilde{f}(y)+t\left(p\left(\frac{y}{t}+x_0\right)-\tilde{f}\left(\frac{y}{t}\right)\right)\\&=p(y+tx_0).\end{aligned}$$

而当 $t<0$ 时，

$$\begin{aligned}f'(x)&=\tilde{f}(y)+tc_0\leqslant\tilde{f}(y)+tm\\&\leqslant\tilde{f}(y)+t\left(-p\left(\frac{-y}{t}-x_0\right)-\tilde{f}\left(\frac{y}{t}\right)\right)\\&=p(y+tx_0).\end{aligned}$$

当 $t=0$ 时，$f'(x)=\tilde{f}(y)\leqslant p(y)$，因此(5)式成立，即 $f'\in\mathscr{F}$。但是 $\tilde{f}\prec f'$，$f'\neq\tilde{f}$。这和 $\tilde{f}$ 的极大性相矛盾，因此 $\mathfrak{B}=E$，即 $\tilde{f}$ 为所求。证毕。

当 E 是复空间时，有如下的相应结果：

定理 3 设 E 是复的线性空间，$p(x)$ 是 E 上的拟范数，E_1 是 E 的线性子空间，又设 $f(x)$ 是 E_1 上的线性泛函，并且满足

$$|f(x)|\leqslant p(x),\quad x\in E_1.$$

则必可把 f 延拓为 E 上的线性泛函 $\tilde{f}$，使得对一切 $x\in E$，有

$$|\tilde{f}(x)|\leqslant p(x).$$

证 令 $r(x)=Ref(x)$，$r(x)$是 E_1 到 R 的实线性泛函，并且

$$r(x)=Ref(x)\leqslant|f(x)|\leqslant p(x),\quad x\in E_1.$$

则根据定理 2 知道，$r(x)$可以延拓为 E 上的线性泛函 $\tilde{r}$，且满足

$$\tilde{r}(x)\leqslant p(x).$$

令

$$\tilde{f}(x)=\tilde{r}(x)-i\tilde{r}(ix),$$

则 $\tilde{f}$ 在 E 上是实线性的。又由于

$$\tilde{f}(ix) = \tilde{r}(ix) + i\tilde{r}(x) = i\tilde{f}(x),$$

所以 $\tilde{f}(x)$ 是 E 上的复线性泛函。因为 $f(x) = r(x) - ir(ix)$，所以知道 $\tilde{f}$ 是 f 的延拓。最后，设 $\tilde{f}(x) = e^{i\theta}|\tilde{f}(x)|$，于是有

$$|\tilde{f}(x)| = e^{-i\theta}\tilde{f}(x) = \tilde{f}(e^{-i\theta}x) = \tilde{r}(e^{-i\theta}x) \leqslant p(e^{-i\theta}x) = p(x).$$

这里用了 $\tilde{r}(e^{-i\theta}x)$ 是 $\tilde{f}(e^{-i\theta}x) = |\tilde{f}(x)|$ 的实部这一事实。证毕。

上面定理的几何形式是有用的。首先注意，如果 $A \subset E$ 是吸收凸集，$p(x)$ 是 A 的 Minkowski 泛函。则线性泛函 f 在 A 上小于等于 1 的充要条件是 $f(x) \leqslant p(x)$。这是因为

$$p(x) = \inf\{\lambda \mid x \in \lambda A\},$$

所以 $f(x) \leqslant p(x), x \in E \Longleftrightarrow$ 当 $x \in \lambda A$ 时，$f(x) \leqslant \lambda \Longleftrightarrow \frac{x}{\lambda} \in A$ 时，$f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leqslant 1 \Longleftrightarrow f(x) \leqslant 1, x \in A$。

定理 2 的几何形式为：设 E 是实线性空间，E_1 是 E 的子空间，A 是 E 中的吸收凸集。如果 f 是 E_1 上的线性泛函，并且在 $E_1 \cap A$ 上不超过 1，则 f 可延拓为 E 上的线性泛函 $\tilde{f}$，使得当 $x \in A$ 时，$\tilde{f}(x) \leqslant 1$。

利用 Hahn-Banach 定理，对于局部凸空间有以下结论：

定理 4 设 E 是局部凸线性拓扑空间，E_1 是 E 的线性子空间，那末 E_1 上的一切连续线性泛函 f 必可延拓成为 E 上的连续线性泛函。

证 令 $r(x) = \operatorname{Re} f(x)$，则 $r(x)$ 是 E_1 上的实连续线性泛函。从而集 $\{x \in E_1 \mid |r(x)| < 1\}$ 是 E_1 中 0 的环境。由于 E_1 是 E 的子空间，所以必存在 E 中 0 的环境 U，使得

$$U \cap E_1 = \{x \in E_1 \mid |r(x)| < 1\}.$$

因为 E 是局部凸的，必存在 0 的均衡凸开环境 $V \subset U$。令 V 的 Minkowski 泛函为 $p(x)$，由于 V 是均衡凸开集，$p(x)$ 是 E 上的拟范数，并且 $V = \{x \mid p(x) < 1\}$。从而必定有

$$r(x) \leqslant p(x), \quad x \in E_1. \tag{6}$$

事实上，如果 $x \in E_1$，任取 $\varepsilon > 0$，则由 $p\left(\frac{x}{p(x)+\varepsilon}\right) < 1$ 可推得

$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in V \cap E_1 \subset U \cap E_1.$$

所以 $r\left(\dfrac{x}{p(x)+\varepsilon}\right)<1$，$r(x)<p(x)+\varepsilon$，令 $\varepsilon\to 0$，即得 (6)，下面证明对于每个 $x\in E_1$，都有

$$|f(x)|\leqslant p(x). \tag{7}$$

事实上，如果设 $f(x)=e^{i\theta}|f(x)|$，则有

$$|f(x)|=e^{-i\theta}f(x)=f(e^{-i\theta}x)=r(e^{-i\theta}x)\leqslant p(e^{-i\theta}x)=p(x).$$

根据定理 3，可以把 f 延拓成为 E 上的线性泛函，并且满足(7)式。由于 $p(x)$ 在 V 上有界，所以 $p(x)$ 是 E 上的连续拟范数，所以 $\tilde{f}$ 是 E 上的连续线性泛函。证毕。

定理 5　设 E 是局部凸空间，A 是 E 中的均衡凸闭集，$x_0\overline{\in} A$，则存在 E 上的连续线性泛函 $f(x)$，满足

$$|f(x)|\leqslant 1,\ \text{对}\ x\in A, \tag{8}$$

且

$$f(x_0)>1. \tag{9}$$

证　首先取 E 中 0 的均衡凸环境 V_1，使得 $A\cap(x_0+V_1)=\varnothing$，然后令 $V=\frac{1}{2}V_1$，则得 $(A+V)\cap(x_0+V)=\varnothing$。由于 $V\subset A+V$，$A+V$ 是均衡吸收凸集。作 $A+V$ 的 Minkowski 泛函 $p(x)$，立即可知道 $p(x)$ 是 E 上的连续拟范数。因为 $A\subset A+V$，所以

$$x\in A\Longrightarrow p(x)\leqslant 1.$$

由于$(A+V)\cap(x_0+V)=\varnothing$，所以 x_0 不属于 $A+V$ 的闭包，所以

$$p(x_0)>1.$$

考虑由 x_0 张成的一维线性子空间 $E_1=\{\lambda x_0|\lambda\in K\}$。在 E_1 上定义线性泛函 φ：$\varphi(\lambda x_0)=\lambda p(x_0)$，则在 E_1 上满足

$$|\varphi(\lambda x_0)|=|\lambda p(x_0)|=p(\lambda x_0).$$

根据定理 3，φ 可以延拓为 E 上的线性泛函 f，并且满足

$$|f(x)|\leqslant p(x),\quad x\in E.$$

由于 $p(x)$ 是连续拟范数，所以 f 是连续的。因为

$$f(x_0)=\varphi(x_0)=p(x_0)>1,$$

并且当 $x\in A\subset A+V$ 时，$|f(x)|\leqslant p(x)\leqslant 1$，所以 f 满足(8)和(9)式，即为所求。证毕。

由定理 5 可以知道，在分离的局部凸空间 E 上，连续线性泛函是足够多的，这就是说，对于 E 中非零元 x_0，必存在 E 上连续的线性泛函 f，使得 $f(x_0)\neq 0$。事实上，因为 $x_0\neq 0$，由于 E 是分离的，存在 0 的均衡凸闭环境 U，使得 $x_0\overline{\in} U$。则由定理 5 即知存在 E 上的连续线性泛函 f，使 $f(x_0)\neq 0$。与此等价地，如果 E 中任两元 $x\neq y$，则必存在 E 上的连续线性泛函 f 分离 x 和 y，即使得

$$f(x)\neq f(y).$$

上述定理实际上反映了一种分离性。一般地，如果 A 和 B 是实线性空间 E 中的两个子集。如果 E 上不恒为 0 的线性泛函 f 使得

$$\sup\{f(x)\,|\,x\in A\}\leqslant\inf\{f(x)\,|\,x\in B\}. \tag{10}$$

则称 f 分离 A 和 B。显然 f 分离 A 和 B 的充要条件是 $-f$ 分离 B 和 A。而如果 f 使得

$$\sup\{f(x)\,|\,x\in A\}<\inf\{f(x)\,|\,x\in B\}, \tag{11}$$

则称 f 强分离 A 和 B。对于复的线性空间上的线性泛函 f，如果其实部 $\mathrm{Re}f$ 分离(强分离)集 A 和 B，则称 f 分离(强分离) A 和 B。

所以定理 5 可表达为如下形式：设 E 是局部凸空间，A 是 E 中均衡凸集，如果 $x_0\overline{\in}\overline{A}$，则必存在 E 上的连续线性泛函 f，使得

$$f(x_0)>\sup\{|f(x)|,\ x\in A\}.$$

由此 f 强分离 x_0 和 A。

在定理 5 中如果取 A 为 E 的闭子空间，即得

推论 1 设 F 是局部凸空间 E 的闭线性子空间，$x_0\in E\setminus F$，则必存在 E 上的连续线性泛函 f，使得 $f(x)$ 在 F 上为 0，而

$$f(x_0)\neq 0.$$

推论 2 设 E 是局部凸空间，A 是 E 中的子集，则由 A 张成的线性子空间在 E 中稠密的充要条件是：对于 E 上的连续线性泛函 f，如果在 A 上为 0，则 f 必恒为 0。

这样的子集 A 称为在 E 中全的。

如果在定理 5 的证明中用凸泛函代替拟范数，则可以得到下述强分离性的定理：

定理 6　设 E 是局部凸空间，C 是 E 中的凸闭集，$0\in C$。如果 $x_0 \overline{\in} C$，则在 E 上必存在连续线性泛函 f，使得

$$x\in C \Longrightarrow \mathrm{Re} f(x)\leqslant 1, \tag{12}$$

而

$$\mathrm{Re} f(x_0)>1. \tag{13}$$

证　取 0 的均衡凸环境 V，使得 $(C+V)\cap(x_0+V)=\phi$，作 $C+V$ 的 Minkowski 泛函 $p(x)$，根据条件，$p(x)$ 是 E 上连续凸泛函，并且当 $x\in C$ 时，

$$p(x)\leqslant 1,\ p(x_0)>1.$$

先把 E 看作实线性空间，在由 x_0 张成的实线性子空间

$$E_1=\{\lambda x_0,\ -\infty<\lambda<\infty\}$$

上，定义一个线性泛函

$$\varphi(\lambda x_0)=\lambda p(x_0),$$

则有

$$\varphi(\lambda x_0)\leqslant p(\lambda x_0),\quad \lambda x_0\in E_1.$$

根据定理 2，必然可以把 $\varphi(x)$ 延拓成 E 上的实线性泛函 $\tilde{\varphi}$，使得对于一切 $x\in E$，有

$$\tilde{\varphi}(x)\leqslant p(x),\quad x\in E.$$

成立。根据定理 1 的推论，$\tilde{\varphi}(x)$ 是 E 上的连续线性泛函，令

$$f(x)=\tilde{\varphi}(x)-i\tilde{\varphi}(ix),$$

则 $f(x)$ 即满足(12)和(13)。证毕。

推论 1　设 E 是实的局部凸空间，A 是 E 中的凸集，如果 $x_0 \overline{\in} \overline{A}$，则必存在 E 上的连续线性泛函 f，使得 f 强分离 A 和 x_0，即

$$f(x_0)>\sup\{f(x),\quad x\in A\}. \tag{14}$$

证　只要对 x_0 和 A 作适当平移，然后利用定理 6 即可。

推论 2　设 E 是局部凸空间，A 是 E 中的凸集，则 A 是闭集的充要条件是：如果 $\{x_\nu\}$ 是 A 中的定向点列，$x_0\in E$，使得对于每个 E 上连续线性泛函 f，有

$$\lim f(x_\nu)=f(x_0) \tag{15}$$

成立。就能推得 $x_0 \in A$。

证 充分性：如果上面的条件成立，设 A 中的定向点列 x_ν 收敛于 $x_0 \in E$，f 是 E 上的任一连续线性泛函，则必有

$$\lim f(x_\nu) = f(x_0).$$

所以由条件得 $x_0 \in A$，A 是闭集。

必要性：如果 A 是闭集，x_ν 是 A 中的定向点列，满足(15)式的条件，但是 $x_0 \bar{\in} A$。按照推论 1，存在 E 上的连续线性泛函 f_0，使得

$$\lim f_0(x_\nu) \leqslant \sup_{x \in A} f_0(x) < f_0(x_0).$$

这就和(15)式相矛盾。证毕。

注 设 E 是局部凸空间，记 E' 为 E 上的连续线性泛函全体。类似于赋范空间，在 E 上可以定义弱拓扑 $\sigma(E, E')$，则推论 2 的结论说明了在局部凸线性拓扑空间中，对于凸集而言，按拓扑是闭的和按弱拓扑 $\sigma(E, E')$ 是闭的这两个概念是一致的。

对于凸集的分离性有下述更一般的定理：

定理 7（分离定理） 设 E 是实或复的线性拓扑空间，A 和 B 是 E 中的两个非空凸子集，并且 A 的内点 A^i 非空，则在 E 上存在连续线性泛函 f 分离 A 和 B 的充要条件是

$$A^i \cap B = \varnothing. \tag{16}$$

先证明几个引理：

引理 1(S.Kakutani) 设 A、B 是线性空间 E 中的两个不相交凸集，则有互补凸集 C 和 D（即 $E = C \cup D$），使 $C \supset A$ 和 $D \supset B$。

证 设 $\mathscr{F}$ 是所有使 $X \supset A$，$Y \supset B$，并且 $X \cap Y = \varnothing$ 的凸集偶 (X, Y) 所成的集族。按包含关系建立序关系，即如果 $X \subset X'$ 且 $Y \subset Y'$，则规定 $(X, Y) \leqslant (X', Y')$，则 $\mathscr{F}$ 成为半序集。容易证明 $\mathscr{F}$ 的每个全序子集在 $\mathscr{F}$ 中必有上界，由 Zohn 引理可知道 $\mathscr{F}$ 中必含有极大元 (C, D)。下面证明 $C \cup D = E$，则 C，D 即满足引理的要求。

任取一点 $p \in E$，如果 $p \bar{\in} C \cup D$，则 p 点和 C 的凸包 $co(\{p\} \cup C\}$ 和 D 的交集，以及 $co(\{p\} \cup D)$ 和 C 的交集至少有一个是空

集。因为否则，将存在 $d\in D$, $c\in C$, 使 $d\in[p, c]$; $c'\in C, d'\in D$, 使 $c'\in[p, d']$同时满足。则$[c, c']$和$[d, d']$必须相交(考虑二维平面)，推得 C 和 D 有公共点，这和 $C\cap D=\emptyset$ 相矛盾。设 p 和 C 的凸包 C' 和 D 不交。则 $(C, D)\leqslant(C', D)$。这和 (C, D) 是极大元相矛盾。所以必须有 $p\in C\cup D$, 即 $E=C\cup D$。证毕。

我们用 $\mathrm{Int}^\circ(C)$表示凸集 C 的凸核；用 $\overline{C^\circ}$ 表示凸集 C 的凸核和境界点全体。

引理 2 设 C 和 D 是线性空间 E 中互补凸子集，则

$$\mathfrak{M}=\overline{C^\circ}\cap\overline{D^\circ}$$

或等于 E，或为实的超平面。又如果 $\mathrm{Int}^\circ C$ 和 $\mathrm{Int}^\circ D$ 中至少有一个集非空时，则$\mathfrak{M}$必为实的超平面。此时，如线性泛函 f 使

$$\mathfrak{M}=E(f=a),$$

则 $\mathrm{Int}^\circ C$ 和 $\mathrm{Int}^\circ D$ 分别是 $E(f>a)$ 和 $E(f<a)$ 中的一个。

证 由于 $E=C\cup D$, C 和 D 的境界点是一样的，所以

$$E\backslash\mathfrak{M}=\mathrm{Int}^\circ C\cup\mathrm{Int}^\circ D.$$

由于 C 和 D 均非空凸集，容易知道$\mathfrak{M}$是非空凸集。下面证明$\mathfrak{M}$是流形，即如果 x、$y\in\mathfrak{M}$, $z\in E$ 使 $y\in(x, z]$, 则必有 $z\in\mathfrak{M}$。事实上，如果 $z\overline{\in}\mathfrak{M}$, 则 $z\in\mathrm{Int}^\circ C\cup\mathrm{Int}^\circ D$, 不妨设 $z\in\mathrm{Int}^\circ C$。因为 $x\in\mathfrak{M}$是 C 的境界点，则由第一章§9 中的定理 1 知

$$(x, z]\subset\mathrm{Int}^\circ C,$$

推得 $y\in\mathrm{Int}^\circ C$。而这和 $y\in\mathfrak{M}$ 相矛盾。所以必须有 $z\in\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$是流形。

再证$\mathfrak{M}$或是超平面或是 E。不失一般性，设 $0\in\mathfrak{M}$，因为否则，可以将所有集平移。取 $p\in\mathrm{Int}^\circ C$，则 $-p$ 必属于 $\mathrm{Int}^\circ D$ (因为如果 $-p\in\mathrm{Int}^\circ C$, 由 $\mathrm{Int}^\circ C$ 的凸性可以推得 $0\in\mathrm{Int}^\circ C$。但是已假定 $0\in\mathfrak{M}$。所以 $0\overline{\in}\mathrm{Int}^\circ C$，导致矛盾。如果 $-p\in\mathfrak{M}$，由$\mathfrak{M}$是流形，而 $0\in\mathfrak{M}$，将推得 $p\in\mathfrak{M}$，这也和假设矛盾。所以 $-p\in\mathrm{Int}^\circ C$)。下面证明$\mathfrak{M}$和 p 张成的线性包是整个 E。事实上，对任意 $x\in C$, 由 $-p\in\mathrm{Int}^\circ D$。$[x, -p]$ 必和$\mathfrak{M}$相交(因为否则，$[x, -p]$ 和 $\mathrm{Int}^\circ C$ 与 $\mathrm{Int}^\circ D$ 的交集分别是 $[x, -p]$ 上的开集，而和集为$[x,$

$-p]$，这和线段的连通性相矛盾)。同样，对任意 $y\in D$，$[y, p]$ 和 $\mathfrak{M}$ 相交，从而 $E=C\cup D$ 包含在 $\mathfrak{M}$ 和 p 的线性包中。所以 $\mathfrak{M}$ 或者是超平面或者是整个空间。特别是，$\mathrm{Int}^\circ C$ 和 $\mathrm{Int}^\circ D$ 至少有一个非空时，$\mathfrak{M}$ 为超平面。

设超平面 $\mathfrak{M}$ 是线性泛函 f 的零空间，即 $\mathfrak{M}=E(f=0)$。从而半空间 $E(f>0)$、$E(f<0)$ 在 $\mathfrak{M}$ 的两侧，由此可知 $\mathrm{Int}^\circ C$ 中的点只能在一个半空间中。事实上，如果 a、$b\in \mathrm{Int}^\circ C$，并且

$$f(a)>0,\qquad f(b)<0。$$

则 $[a, b]\cap\mathfrak{M}\neq\emptyset$，同时 $[a, b]\in \mathrm{Int}^\circ C$，这说明 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathrm{Int}^\circ C$ 有公共点，而这是不可能的。同样，$\mathrm{Int}^\circ D$ 中的点只能在一个半空间中。同时 $\mathrm{Int}^\circ C$ 和 $\mathrm{Int}^\circ D$ 也不会在同一个半空间中。这是因为如果 $c\in \mathrm{Int}^\circ C$，$d\in \mathrm{Int}^\circ D$，并且 $f(c)>0$，$f(d)>0$，那末

$$[c, d]\cap\mathfrak{M}=\emptyset,$$

$[c, d]$ 中相对开的非空集合 $\mathrm{Int}^\circ C\cap[c, d]$ 和 $\mathrm{Int}^\circ D\cap[c, d]$ 将充满整个 $[c, d]$，这和 $[c, d]$ 是连通的相矛盾。

由 $\mathrm{Int}^\circ C\cup \mathrm{Int}^\circ D\cup\mathfrak{M}=E$，即知 $\mathrm{Int}^\circ C$ 和 $\mathrm{Int}^\circ D$ 分别是 $E(f>0)$ 及 $E(f<0)$ 中的一个集。证毕。

定理 7 的证明：

必要性：不失一般性，可以设 E 是实线性空间。如果实线性泛函 f 分离 A 和 B：

$$\sup\{f(x), x\in A\}\leqslant\inf\{f(x), x\in B\},$$

因为 A 在开核 A^i 上一定是吸收的，所以 $f(A)$ 在 $f(A^i)$ 上也必是吸收的，因此在 A^i 上 $f(x)$ 不会取到极大值，从而 $f(A^i)\cap f(B)=\emptyset$，由此推得 $A^i\cap B=\emptyset$。

充分性：如果 $A^i\cap B=\emptyset$，由引理 1 知道存在互补凸集 C 和 D，使 $C\supset A^i$，$D\supset B$。令 $\mathfrak{M}=\overline{C^\circ}\cap\overline{D^\circ}$，因为 C 的凸核非空，由引理 2，知道 $\mathfrak{M}$ 是一个超平面，则存在 E 上的线性泛函 f，使得

$$\mathfrak{M}=E(f=a),$$

并且 $E(f>a)$ 与 $E(f<a)$ 分别是 C 和 D 的凸核。由于 A^i 非空，所以 f 在 E 的某开集上取值为 R 的真子集，由第一章 §7 中的定理

2 可知道 f 是连续的。由 $f(A^t)<a$ 推得 $f(A)\leqslant a$，从而

$$\sup\{f(x),\ x\in A\}\leqslant a\leqslant \inf\{f(x),\ x\in B\}.$$

对于复的线性拓扑空间的情形，只要令 $g(x)=f(x)-if(ix)$ 即可。证毕。

对于两个集的分离性，总可以化为一个点和一集的分离性。线性泛函 f 分离 A 和 B 的充要条件是 f 分离 0 和 $B-A$。如果 A 是 E 中的紧集，B 是 E 中的闭集，则 $B-A$ 是闭的。

推论 1　设 E 是局部凸空间，A 和 B 是 E 中非空的凸子集，并且 $A\cap B=\varnothing$，又设 A 是紧集，B 是闭集。则必存在 E 上的连续线性泛函 f，强分离 A 和 B：

$$\sup\{\mathrm{Re}f(x),\ x\in A\}<\inf\{\mathrm{Re}f(x),\ x\in B\}.$$

又如果 B 是均衡的，则存在 E 上的连续线性泛函 f，使

$$\sup\{|f(x)|,\ x\in A\}<\inf\{|f(x)|,\ x\in B\}.$$

最后，应指出 Hahn-Banach 定理本质上是纯代数的定理。本节中的结论可以看作线性空间中的相应定理在局部凸空间中的应用。

§4　共轭空间和弱拓扑

设 (X,T) 是局部凸线性拓扑空间，X 上的连续线性泛函全体按照通常的加法和数乘以泛函的运算成为一个线性空间，称为 X 的共轭空间，记为 X'。X 上除了原来的拓扑以外，还可以定义其它的向量拓扑。取 X 上的一族拟范数

$$\{|f(x)|,\ f\in X'\},\tag{1}$$

由这一族拟范数决定线性空间 X 上的一个局部凸向量拓扑，称为 X 上的弱拓扑，记为 $\sigma(X,X')$。X 按拓扑 $\sigma(X,X')$ 组成的局部凸空间记为 $(X,\sigma(X,X'))$，或简单地记为 X_σ。任意取有限个 $f_1,\cdots,f_n\in X'$，以及 $\varepsilon>0$，令

$$U(f_1,\cdots,f_n,\varepsilon)=\{x\,\big|\,|f_\nu(x)|<\varepsilon,\ \nu=1,2,\cdots,n\},$$

则这种集的全体构成弱拓扑 $\sigma(X,X')$ 在 0 点的环境基。

对于每个 $f\in X'$，因为集 $\{x\,|\,|f|<\varepsilon\}$ 正是弱拓扑 $\sigma(X, X')$在 0 点的环境，所以 $f(x)$ 关于 X 上的弱拓扑 $\sigma(X, X')$是连续的。同时，由定义即知道 $\sigma(X, X')$ 是 X 上使得 X' 中的一切线性泛函连续的最弱向量拓扑，所以必定有 $\sigma(X, X')\subset T$。

设 X^* 表示 X 上线性泛函全体组成的线性空间，A 是 X^* 中的子集。如果对于 X 中的每一个非零元 $x\neq 0$，必存在 $f\in A$，使得 $f(x)\neq 0$，则称集 A 在 X 上是全的。由§3 知道，如果 (X, T) 是分离的局部凸线性拓扑空间，则(X, T)上连续线性泛函全体 X' 在 X 上是全的，因此，如果 $x\in X$，$x\neq 0$，则

$$\sup_{f\in X'}|f(x)|\neq 0。\tag{2}$$

由§1 中的性质 I 即知：

（I） 设 X 是局部凸线性拓扑空间，并且满足 T_0 分离公理，则 X 上的弱拓扑 $\sigma(X, X')$ 也是分离的。

（II） X 中的定向点列 x_ν 按弱拓扑 $\sigma(X, X')$收敛到 $x\in X$，可以记作 $x_\nu\xrightarrow{\sigma}x$，充要条件是：对每个 $f\in X'$，有下式成立：

$$\lim f(x_\nu)=f(x)。\tag{3}$$

证 由(1)：$x_\nu\xrightarrow{\sigma}x$ 的充要条件是：对每个 $f\in X'$，有

$$|f(x_\nu-x)|\longrightarrow 0,$$

即等价于 $f(x_\nu)\longrightarrow f(x)$。证毕。

设 (X, T) 是局部凸空间。由于总有 $\sigma(X, X')\subset T$，所以 X 中的每个 $\sigma(X, X')$ 拓扑闭集必是拓扑 T 闭的。但是反过来，T 拓扑闭集不一定是 $\sigma(X, X')$ 闭的。不过，如果子集 A 是凸集，则由§3 中的定理 6 的推论 2 立即可得下面的(III)，它可看作赋范空间的情形在局部凸空间时的推广。

（III） 设 X 是局部凸线性拓扑空间，则凸子集 $A\subset X$ 是闭集的充要条件是：A 为 $\sigma(X, X')$ 闭的。 Mazur

特别是，对于线性子空间，闭和弱拓扑闭是一致的。

（IV） 设(X, T)是局部凸空间，A 是 X 中的凸闭子集，f 是 X 上的线性泛函，则 f 在 A 上是连续的充要条件是：f 在 A 上关于弱

拓扑 $\sigma(X, X')$ 是连续的。

证 因为 $f(x)$ 是连续的充要条件是：其实部是连续的，不失一般性，可以假定 f 是实的线性泛函。如果 $f(x)$ 在 A 上是弱拓扑 $\sigma(X, X')$ 连续的，由第一章§9中的定理3可知道充要条件是：对于每一个数 a，$f^{-1}(a)\cap A$ 在 A 中是相对弱闭的。由假设，A 是 X 中的凸闭子集，由性质(III)，A 也是弱闭的。所以 $f^{-1}(a)\cap A$ 相对于 A 是弱闭的充要条件是：$f^{-1}(a)\cap A$ 是 X 中的弱闭集。又因为 $f^{-1}(a)\cap A$ 是凸集，又由性质(III)知道，充要条件为 $f^{-1}(a)\cap A$ 是 X 中的闭集，这等价于 $f^{-1}(a)\cap A$ 相对于 A 是闭的。所以 $f(x)$ 在 A 上弱连续的充要条件是：f 在 A 上是连续的。证毕。

设 (X, T) 是局部凸空间，由于 $\sigma(X, X')\subset T$，所以 X 中的子集如果关于拓扑 T 是有界集（有时简单地称为 T－有界），则一定是 $\sigma(X, X')$ 有界的。对于局部凸空间，相反的结论也是对的。首先注意：

(V) 设 (X, T) 是局部凸空间，X 中的子集 A 是弱有界的充要条件是：对每一个 $f\in X'$，$f(x)$ 在 A 上有界，即

$$\sup_{x\in A}|f(x)|<\infty.$$

证 因为弱拓扑是由拟范数族 $\{|f(x)|, f\in X'\}$ 导出的，由§1中的性质(IV)即可知。详细证明如下：

设 A 是 $\sigma(X, X')$ 有界集，任取 $f\in X'$，作0的弱拓扑环境

$$U=\{x\,|\,|f(x)|<1\},$$

由于 A 被 U 吸收，必存在正数 δ，使

$$|\lambda|\leqslant\delta\Longrightarrow\lambda A\subset\{x\,|\,|f(x)|<1\}.$$

所以当 $x\in A$ 时，$f(x)\leqslant\dfrac{1}{\delta}$，即 f 在 A 上有界。

反之，如果对每个 $f\in X'$，f 在 A 上有界，对0的任一环境

$$U(f_1, \cdots, f_n, \varepsilon)=\{x\,|\,|f_\nu(x)|<\varepsilon, \nu=1, \cdots, n\},$$

其中 $f_\nu\in X$，$(\nu=1, 2, \cdots, n)$。我们令

$$\alpha=\max_{1\leqslant\nu\leqslant n}\sup_{x\in A}|f_\nu(x)|<\infty,$$

取 $0<\delta<\frac{\varepsilon}{\alpha}$，则当 $|\lambda|\leqslant\delta$ 时，$\lambda A\subset U(f_1, \cdots, f_n, \varepsilon)$。因此 A 是弱有界集。证毕。

定理 1(Mackey) 设 X 是局部凸空间，X 中的子集 A 是有界的充要条件是：A 是弱拓扑 $\sigma(X, X')$ 有界的。或等价地，对每个 $f\in X'$，必有

$$\sup_{x\in A}|f(x)|<\infty. \tag{4}$$

证 只要证明局部凸空间中弱有界集也是有界集即可。不妨设 X 上的局部凸拓扑是由拟范数族 $\{p_\alpha(x), \alpha\in\mathscr{A}\}$ 给定的。为了要证明 A 有界只要证明对每个 $\alpha\in\mathscr{A}$，$p_\alpha(x)$ 在 A 上有界。令

$$N_\alpha=\{x\,|\,p_\alpha(x)=0\},$$

显然，N_α 是 X 中的闭线性子空间，作商空间

$$X_\alpha=X/N_\alpha, \tag{5}$$

设 $x\in X$，记 $\hat{x}=\{x+N_\alpha\}$ 为 x 相应的等价类，规定

$$|\hat{x}|_\alpha=p_\alpha(x), \tag{6}$$

则 X_α 关于 $|\hat{x}|_\alpha$ 成为一个线性赋范空间。令 $\hat{A}=\{\hat{x}, x\in A\}$，现在证明 $\hat{A}$ 是赋范空间 $(X_\alpha, |\cdot|_\alpha)$ 中的有界集。事实上，任取 $(X_\alpha, |\cdot|_\alpha)$ 上的连续线性泛函 $\hat{f}$，作 X 上的泛函 f 如下：

$$f(x)=\hat{f}(\hat{x}),\quad x\in X. \tag{7}$$

显然，f 是 X 上的线性泛函，又因为

$$|f(x)|=|\hat{f}(\hat{x})|\leqslant\|\hat{f}\|\,|\hat{x}|_\alpha=\|\hat{f}\|p_\alpha(x).$$

所以 $f\in X'$。由假定，A 是 $\sigma(X, X')$ 有界的，所以

$$\sup_{x\in A}|f(x)|<\infty.$$

由(7)知：

$$\sup_{\hat{x}\in\hat{A}}|\hat{f}(\hat{x})|<\infty,$$

于是由共鸣定理可知道，$\hat{A}$ 按范数 $|\hat{x}|_\alpha$ 是有界的，所以有

$$\sup_{x\in A}p_\alpha(x)=\sup_{\hat{x}\in\hat{A}}|\hat{x}|_\alpha<\infty.$$

即对 X 上的每个连续拟范数 $p_\alpha(x)$ 在 A 上有界，由此 A 是 X 中的有界集。证毕。

对于局部凸空间 X 上的弱拓扑 $\sigma(X, X')$，一个子集的弱完全

有界性和弱紧性概念也是简单的，搞清它们之间的关系是十分有用的。

对每一个 $f\in X'$，作数直线 $K_f=K$，取通常拓扑，作乘积拓扑空间 $P=\prod\{K_f, f\in X'\}$，作 X 到 P 的典型映照 T，

$$T: X\longmapsto\{x(f), f\in X'\},$$

则 X 经映照 T 对应 P 中的一个子集 $T(X)$。如果 X 满足 T_0 分离公理，那末 X' 在 X 上是全的，此时 T 是一一映照。如果在 X 上取弱拓扑 $\sigma(X, X')$，而 $T(X)$ 上取由 P 在 $T(X)$ 上导出的相对拓扑，则由 $\sigma(X, X')$ 拓扑的定义，映照 T 是 $(X, \sigma(X, X'))$ 到 $T(X)$ 的线性同胚映照：$(X, \sigma(X, X'))\cong T(X)$。

对于 $P=\prod\{K_f, f\in X'\}$ 中的元可记为 $x=\{x_f, f\in X'\}$，其中 x_f 表示 x 点在坐标空间 K_f 上的坐标。设 B 是 P 中的有界集。因为空间 P 到坐标空间 K_f 的投影映照 $x\longmapsto x_f$，$f\in X'$ 是连续线性映照，所以 $\{x_f, f\in B\}$ 是 K_f 中的有界集，即

$$a_f=\sup\{|x_f|, x\in B\}<\infty,$$

从而 B 是 $\prod_{f\in X'} A_f$ 的子集，其中 $A_f=\{t\in K, |t|\leqslant a_f\}$，由 Tychonoff 定理知道 $\prod_{f\in X'} A_f$ 是紧集。所以对于 P 中的每个有界闭集必是紧的，由此 P 中的每个有界集是完全有界的。

由于同构，局部凸空间 X 中的子集 B 是 $\sigma(X, X')$ 有界的充要条件是：$T(B)$ 是 $T(X)$ 中的从而是乘积空间 P 中的有界集，所以必定完全有界。由此可得

(VI) 设 X 是局部凸空间，则 X 中的子集 B 是弱有界的充要条件是：B 是弱完全有界的。

值得注意的是：对于 $(X, \sigma(X, X'))$ 中的有界闭集，一般并不能推得它是紧的。如果 B 是 X 中的弱有界弱闭集，只能知道 $T(B)$ 是 $T(X)$ 中的有界闭集。由于 $T(X)$ 在 P 中不一定是闭集，所以不能断言 $T(B)$ 是 P 中的闭集。如果 $(X, \sigma(X, X'))$ 是完备的，则 $T(X)$ 是 P 中的闭集。此时，X 中的每一个弱有界弱闭子集必定是弱紧的。

例 设 l^1 为满足 $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|<\infty$ 的数列 $x=(x_1, x_2, \cdots)$ 全体按通常线性运算和范数 $\|x\|=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|$ 所成的 Banach 空间，$l^{1*}=m$。在 l^1 上的连续线性泛函的一般形式为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\eta_i,$$

其中 $\eta=(\eta_1, \eta_2, \cdots)\in m$。$l^1$ 上的弱拓扑由拟范数族 $\{|f(x)|, f\in l^{1*}\}$ 给定。由泛函分析中熟知的结论：l^1 中弱收敛序列是按范数收敛的。l^1 上的弱拓扑一定不满足第一可列公理，即不能距离化。事实上，如果 l^1 上的弱拓扑可以距离化，则 l^1 上的弱拓扑和范数拓扑是一致的，$\{x \mid \|x\|<1\}$ 就应该是弱拓扑在 0 点的环境。但是弱拓扑 0 点的环境基为 $\{U(f_1, \cdots, f_n, \varepsilon)\}$，其中每一个环境 $U(f_1, \cdots, f_n, \varepsilon)$ 包含一个 co-n 维的子空间 $\bigcap_{i=1}^{n} N(f_i)$，这样

$$\{x \mid \|x\|<1\}$$

必须包含一个 co-n 维的子空间，这和 $\|\cdot\|$ 是范数相矛盾。这是一个弱拓扑不可距离化的例子。

共轭空间上的拓扑

设 X 是局部凸空间，X' 是 X 的共轭空间，这和 Banach 空间理论一样，在 X' 上可以定义不同的向量拓扑。

对每个 $x\in X$，定义 $\hat{x}(f)=f(x)$，则 X 中的元 X 可以看作是 X' 上的线性泛函 $\hat{x}$，由此，$\{|\hat{x}(f)|, x\in X\}$ 即 $\{|f(x)|, x\in X\}$，可以看作 X' 上的一族拟范数，由它导出的局部凸拓扑称为 X 上的弱*拓扑，记作 $\sigma(X', X)$。任取有限个元 $x_1, \cdots, x_n\in X$，以及 $\varepsilon>0$，作集合

$$U(x_1, \cdots, x_n, \varepsilon)=\{f \mid |\hat{x}_\nu(f)|<\varepsilon, \nu=1, 2, \cdots, n\},$$

那末，这种集的全体构成 $(X', \sigma(X', X))$ 在 0 点的环境基。

另外，在 X' 中可以定义强拓扑，设 $\mathscr{B}$ 是 X 中的有界集的全体。对于每一个 $B\in\mathscr{B}$，定义

$$P^B(f)=\sup_{x\in B}|f(x)|,\ f\in X'.$$

由于 B 是 X 中的有界集，所以对每一个 $f\in X'$，$P^B(f)$ 都是一个有限值。在 X' 上，由拟范数族$\{P^B(f),\ B\in\mathscr{B}\}$导出的局部凸向量拓扑称为 X' 上的强拓扑，可以记作 $\beta(X',X)$。容易知道，X' 中的定向点列 f_ν 按 $\beta(X',X)$ 收敛于 0 的充要条件是：在每个有界集 $B\in\mathscr{B}$ 上，$f_\nu(x)$一致收敛于 0。显然，有 $\sigma(X',X)\subset\beta(X',X)$。

如果 X 是赋范空间，范数记为 $\|\cdot\|$，设 B 是 X 中的有界集，那末 $\sup\limits_{x\in B}\|x\|=M<\infty$，由此，对每个 $f\in X'$，有

$$P^B(f)=\sup_{x\in B}|f(x)|\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant M}|f(x)|=M\|f\|.$$

如果令 $B_1=\{x\,|\,\|x\|\leqslant 1\}$，那末有 $P^{B_1}(f)=\|f\|$。所以由 $\{P^B(f),\ B\in\mathscr{B}\}$决定的 X' 上的强拓扑 $\beta(X',X)$ 和 $\|f\|$ 决定的拓扑是一样的。

对于一般的局部凸空间 X，X' 中的强拓扑一般地说，并不能由一个范数或拟范数给出。在上面，我们已经看到在 X' 上可以构造不同的向量拓扑。以后如果不特别指明，X' 上总赋予强拓扑而称为 X 的共轭空间 X'。

我们知道：如果 X 是赋范空间，共轭空间 X' 中的单位球

$$V^0=\{f\in X',\ \|f\|\leqslant 1\}$$

关于弱*拓扑 $\sigma(X',X)$ 是紧集，由此可知道 X' 中的每个有界集关于 $\sigma(X',X)$ 是相对紧的，即它的弱*拓扑闭包关于弱*拓扑是紧的。对于一般的局部凸空间有下述重要定理，它可看作赋范空间情形的推广。

定理 2(Alaoglu-Bourbaki)　设 X 是局部凸空间，$p(x)$ 是 X 上的连续拟范数，X' 中关于拟范数 $p(x)$ 连续的泛函全体记为

$$(X_p)'=\{f\in X',\ \sup_{p(x)\leqslant 1}|f(x)|<\infty\}.$$

那末 $(X_p)'$ 按范数 $\|f\|_p=\sup\limits_{p(x)\leqslant 1}|f(x)|$ 成为 Banach 空间，并且 $(X_p)'$ 中的单位球 $V_p^0=\{f\in X',\|f\|_p\leqslant 1\}$关于 X' 中弱*拓扑 $\sigma(X',X)$ 是紧集。

证 很明显，$(X_p)'$ 关于 $\|\cdot\|_p$ 是一个赋范空间。

首先证明 $(X_p)'$ 中关于 $\|\cdot\|_p$ 的单位球 V_p^0 是弱* 拓扑 $\sigma(X', X)$ 完备的。事实上，如果 $f_\nu \in V_p^0$ 是关于 $\sigma(X', X)$ 的基本定向点列，则对于每个 $x\in X$，$\{f_\nu(X)\}$ 是基本半序数列，所以必收敛于某数，记为 $f(x)$。令

$$f(x) = \lim f_\nu(x),\ x\in X.$$

容易知道 $f(x)$ 是 X 上的线性泛函，由于 $f_\nu \in V_p^0$，有

$$|f_\nu(x)| \leqslant p(x),\ x\in X.$$

对 ν 取极限即得 $|f(x)|\leqslant p(x)$，所以 $f\in X'$ 且 $f\in V_p^0$，就是说 V_p^0 关于 $\sigma(X', X)$ 是完备的。特别是，V_p^0 是 $\sigma(x', x)$ 闭的。又容易知道 $(X_p)'$ 上的范数 $\|\cdot\|_p$ 拓扑强于 $(X', \sigma(X', X))$ 在 $(x_p)'$ 上的诱导拓扑。由 §1 中的定理 2 可知道，V_p^0 关于范数 $\|\cdot\|_p$ 拓扑也是完备的。所以 $(X_p)'$ 关于 $\|\cdot\|_p$ 是完备的，成为 Banach 空间。

如果建立一一对应 $f \longmapsto \{f(x),\ x\in X\}$，可以把 $(X', \sigma(X', X))$ 同胚地嵌入 C^X（其中 C^X 看作乘积拓扑空间 $\prod\{C, x\in X\}$）而看作 C^X 的子空间。对于固定的 $x\in X$，当 $f\in V_p^0$ 时，$|f(x)|\leqslant p(x)$。所以 V_p^0 可以看作 $A=\prod\limits_{x\in X} A_x$ 的子集，其中 $A_x=\{t \mid |t|\leqslant p(x)\}$。由于 Tychonoff 定理，集 A 是 C^X 中的紧集，而 V_p^0 是 A 的子集，所以 V_p^0 关于弱拓扑 $\sigma(X', X)$ 是完全有界的。又因为 V_p^0 是关于 $\sigma(X', X)$ 完备的，所以由第一章 §10 中的定理 1 可知道 V_p^0 是 $\sigma(X', X)$ 拓扑紧的。证毕。

系 1 设 X 是局部凸空间，S 是 X' 中关于 X 中拓扑的等度连续集合，则 S 关于弱* 拓扑 $\sigma(X', X)$ 是相对紧的。

证 由于 S 是等度连续集合，必定存在连续拟范数 $p(x)$，记 $V_p=\{x \mid p(x)\leqslant 1\}$，使得当 $x\in V_p$ 时，对每一个 $f\in S$，均有 $|f(x)|\leqslant 1$，所以 $S\subset V_p^0$，由定理 2 可知，S 是相对紧的。证毕。

系 2(Banach-Alaoglu) 设 X 是赋范空间，则 X' 中的闭单位球是 σ^* 紧的。

最后顺便指出：定理 2 中的 $(X_p)'$ 就是在定理 1 的证明中所

构造的 X_p 的共轭空间。如果 S 是 X 上的连续拟范数基，则

$$X' = \bigcup_{p\in S} (X_p)'.$$

§5　局部凸空间的投影拓扑和投影极限

我们已经知道了乘积拓扑和商拓扑是线性空间中构造新的向量拓扑的两个基本方法。在局部凸线性拓扑空间理论中，投影拓扑(或投影极限)及归纳拓扑(或归纳极限)可以看作上述乘积拓扑(或弱拓扑)及商拓扑概念的推广。并且在通常意义下，投影极限和归纳极限这两个概念是相互对偶的(参阅[6])。

归纳极限在广义函数论中有重要的应用。

设 E 和 $E_\alpha(\alpha\in A)$ 是线性空间，$\mathscr{T}_\alpha$ 是 E_α 上的分离的局部凸向量拓扑，$u_\alpha: E\longrightarrow E_\alpha$ 是 E 到 E_α 中的线性映照。则 E 上满足下述条件的最弱拓扑 $\mathscr{T}$：使得每个线性映照 u_α，$\alpha\in A$ 都是 $(E, \mathscr{T})$ 到 $(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 的连续映照，称为 E 上关于 $\{(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha, u_\alpha), \alpha\in A\}$ 的投影拓扑。

在本节中，总假定 $(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 满足分离性，以后不再特别指明。

明显地，$\mathscr{T}$ 是 E 上强于每个 $u_\alpha^{-1}(\mathscr{T}_\alpha)$，$\alpha\in A$ 的最弱拓扑，其中 $u_\alpha^{-1}(\mathscr{T}_\alpha)$ 是指 E 上使 u_α 连续的最弱拓扑。设 $x\in E$，$x_\alpha = u_\alpha(x)$，$\alpha\in A$，x 点的 $\mathscr{T}$ 拓扑环境是由所有如下形式的集合 $\bigcap_{\alpha\in H} u_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 构成的，其中 U_α 是 x_α 的任一关于 $\mathscr{T}_\alpha$ 的环境，H 是 A 的任一有限集合。由于 u_α 是线性映照，$\mathscr{T}_\alpha$ 是局部凸向量拓扑，拓扑 $\mathscr{T}$ 在 E 上是平移不变的，并且在 0 点存在一组凸的环境基 $\{\bigcap_{\alpha\in H} u_\alpha^{-1}(U_\alpha)\}$，其中 U_α 分别取 $(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 中 0 的凸环境，H 是 A 的任一有限集合。容易验证，它满足第一章向量拓扑局部基的条件，所以上述定义的拓扑 $\mathscr{T}$ 是 E 上的局部凸向量拓扑。

(I)　E 上关于族 $\{(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha, u_\alpha), \alpha\in A\}$ 的投影拓扑 $\mathscr{T}$ 是 E 上使得每个 u_α，$\alpha\in A$ 都连续的最弱局部凸向量拓扑。设 S_α 是局部凸空间 $(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 上的连续拟范数子基，则 E 上投影拓扑 $\mathscr{T}$ 以拟范

数族$\{P\circ u_\alpha \mid \alpha\in A,\ P\in S_\alpha\}$为连续拟范数子基。

证 由投影拓扑的定义。$u_\alpha: E\longrightarrow E_\alpha$是连续的，如果$p\in S_\alpha$，则$p\circ u_\alpha(x)=p(u_\alpha(x))$是$E$上的连续拟范数。另一方面，拟范数族$\{p\circ u_\alpha \mid \alpha\in A,\ p\in S_\alpha\}$定义了$E$上一个局部凸向量拓扑$\mathscr{T}$，由本章§1中的定理4，每个$u_\alpha$，$\alpha\in A$是连续的，所以$\mathscr{T}$就是投影拓扑。

从而有下述性质：

(II) E上关于族$\{(E_\alpha,\mathscr{T}_\alpha,u_\alpha),\ \alpha\in A\}$的投影拓扑是满足Hausdorff分离公理的充要条件为：对于每个$x\in E$，$x\neq 0$。必存在$\alpha\in A$和$p\in S_\alpha$，使得

$$p\circ u_\alpha(x)\neq 0 \tag{1}$$

等价的充要条件是：关于$x\in E$，如果对每个$\alpha\in A$，都有$u_\alpha(x)=0$，则$x=0$。

定理1 设E上赋以关于族$\{(E_\alpha,\mathscr{T}_\alpha,u_\alpha),\ \alpha\in A\}$的投影拓扑，$F$是任一线性拓扑空间，则线性映照$T: F\longrightarrow E$是连续的充要条件为：对每一个$\alpha\in A$，$u_\alpha\circ T$是$F\longrightarrow(E_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$的连续线性映照。

证 如果T是连续线性映照，很明显，$u_\alpha\circ T$，$\alpha\in A$是连续的。反之，如果对每一个$\alpha\in A$，$u_\alpha\circ T$是连续的，对于E上连续拟范数子基$\{p\circ u_\alpha,\ \alpha\in A,\ p\in S_\alpha\}$中的任一拟范数$p\circ u_\alpha$，有

$$(p\circ u_\alpha)(Ty)=p(u_\alpha\circ Ty),\quad y\in F.$$

由于其中$p\in S_\alpha$，$u_\alpha\circ T$是连续的，所以$p(u_\alpha\circ Ty)$是F上的连续拟范数，从而$(p\circ u_\alpha)(Ty)$是F上的连续拟范数。由本章§1中的定理4即知，$T: F\rightarrow E$是连续的。证毕。

由(I)还可得到：

(III) 设B是E中子集，则B关于投影拓扑$\mathscr{T}$是有界集的充要条件为：对于每个$\alpha\in A$，$u_\alpha(B)$是$(E_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$中的有界集。

下面举一些投影拓扑的例子。

例1 子空间。设X是局部凸空间，M是X的线性子空间，X在M上的导出拓扑是M上关于自然嵌入映照$M\longrightarrow X$的投影拓扑，M赋以导出拓扑也是一个局部凸空间，称为X的子空间。

例 2 乘积空间。设 $(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)(\alpha\in A)$是一族局部凸线性拓扑空间。考虑乘积空间 $E=\prod_{\alpha\in A}E_\alpha$，那末 E 上的乘积拓扑是关于投影族 $p_\alpha: E\longrightarrow E_\alpha(\alpha\in A)$的投影拓扑。

例 3 设 $\{\mathscr{T}_\alpha, \alpha\in A\}$ 是向量空间 E 上的一族局部凸向量拓扑，则拓扑 $\mathscr{T}_\alpha(\alpha\in A)$的最小上界 $\mathscr{T}=\bigvee\{\mathscr{T}_\alpha, \alpha\in A\}$是投影拓扑。事实上，局部凸向量拓扑 $\mathscr{T}$ 是 E 上关于族 $\{(E, \mathscr{T}_\alpha, I), \alpha\in A\}$的投影拓扑，其中 I 是 E 到 E 的恒等映照。

例 4 弱拓扑。设 E 是线性空间，E^* 是 E 上的线性泛函全体，F 是 E^* 中的子集，则 E 上由拟范数族$\{|\langle x, y\rangle|, y\in F\}$决定的局部凸向量拓扑[记为 $\sigma(E, F)$]是投影拓扑。事实上，设 $K_f=K$ (K 是实数域或复数域)，每一个 $f\in E^*$ 可以看作 $E\longrightarrow K_f$ 的线性映照。则 $\sigma(E, F)$ 是 E 上关于族$\{(K_f, f), f\in F\}$的投影拓扑。容易知道，如果把 F 换成由 F 张成的线性子空间，并不改变相应的投影拓扑。特别是，如 E 是局部凸空间，取 $F=E'$ 为 E 的共轭空间，则 E 上的弱拓扑 $\sigma(E, E')$ 是投影拓扑。

设 $u_\alpha: E\longrightarrow E_\alpha$ 满足式(1)的条件，则 E 上关于

$$\{(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha, u_\alpha), \alpha\in A\}$$

的投影拓扑$\mathscr{T}$是分离的。我们可以把 E 嵌入乘积空间 $\prod_{\alpha\in A}E_\alpha$，其嵌入映照为 $x\longmapsto\{u_\alpha(x)\}_{\alpha\in A}$，由于 u_α 满足(1)，所以它是一一映照。这样，我们可以把 E 看作 $\prod_{\alpha\in A}E_\alpha$ 中的线性子空间。E 上关于族$\{(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha, u_\alpha), \alpha\in A\}$的投影拓扑就是 $\prod_{\alpha\in A}E_\alpha$ 中乘积拓扑在 E 上的导出拓扑。由于完备局部凸空间的闭线性子空间是完备的，由此得到：

(VI) 设 $u_\alpha: E\longrightarrow E_\alpha$ 满足式(1)的条件，$(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)(\alpha\in A)$是完备(有界完备或序列完备)的局部凸空间。如果 E 在 $\prod_{\alpha\in A}E_\alpha$ 中的像是闭的，则 E 赋以关于族 $\{(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha, u_\alpha), \alpha\in A\}$ 的投影拓扑是完备的(相应地有界完备或序列完备)。

投影极限

设 $E_\alpha(\alpha\in A)$是一族局部凸空间(线性空间)，A是一个定向半序的足标集合，对于每一对足标 $\beta\geqslant\alpha$，定义了一个连续线性映照(相应地线性映照) $u_{\alpha\beta}: E_\beta\longrightarrow E_\alpha$。则 $(E_\alpha, u_{\alpha\beta})$ 称为*局部凸空间*(*相应地线性空间*)*的投影系*，如果满足下述条件：

(a) $u_{\alpha\alpha}=I,\ \alpha\in A$； (2)

(b) $u_{\alpha\gamma}=u_{\alpha\beta}\circ u_{\beta\gamma}$，对 $\gamma\geqslant\beta\geqslant\alpha$。 (3)

当 A 是自然数集合 N，按通常大小定向，则投影系

$$\{E_\alpha,\ \alpha=1,\ 2,\ \cdots\}$$

称为*投影序列*。

对于投影序列只要对每个 $n\in N$，给定连续线性映照(相应地线性映照)$u_{n,\,n+1}: E_{n+1}\to E_n$，其它的映照 $u_{mn}(n>m)$ 可以由(3)式确定。

设$(E_\alpha, u_{\alpha\beta})$是线性空间的投影系。作线性空间 $E_\alpha(\alpha\in A)$ 的乘积空间 $\prod\limits_{\alpha\in A}E_\alpha$。$E$ 是 $\prod E_\alpha$ 的子空间，它是由满足下述条件的所有元素 $x=(x_\alpha,\ \alpha\in A)$组成，使得

$$x_\alpha=u_{\alpha\beta}(x_\beta),\ \text{当}\ \beta\geqslant\alpha。\tag{4}$$

则称 E 为 $\{E_\alpha,\ \alpha\in A\}$ 关于映照族 $u_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\ \beta\in A,\ \beta\geqslant\alpha)$ 的投影极限，记作 $E=\varprojlim E_\alpha$，或更精确地记为 $E=\varprojlim u_{\alpha\beta}E_\beta$。

如果记 u_α 为 E 到 E_α 分量的投影

$$u_\alpha:\ \varprojlim E_\alpha\longrightarrow E_\alpha。\tag{5}$$

则由(5)和(4)式不难推得

$$u_\alpha=u_{\alpha\beta}\circ u_\beta,\ \beta\geqslant\alpha。\tag{6}$$

定义 设$(E_\alpha, u_{\alpha\beta})$是局部凸空间的投影系，$\mathscr{T}_\alpha$ 是 E_α 上的局部凸拓扑。在线性空间的投影极限 E 上赋以关于族

$$\{(E_\alpha,\ \mathscr{T}_\alpha,\ u_\alpha),\ \alpha\in A\}$$

的投影拓扑，称为$(E_\alpha, u_{\alpha\beta})$的*拓扑投影极限*，或简称*投影极限*，仍记作 $E=\varprojlim E_\alpha$。

容易知道，拓扑投影极限 E 可以看作乘积拓扑空间 $\prod_{\alpha\in A} E_\alpha$ 的线性子空间。由性质(Ⅰ)可推知：

(Ⅴ) 设 $(E_\alpha, u_{\alpha\beta})$ 是局部凸空间的投影系，S_α 是局部凸空间 E_α 上的连续拟范数基。则投影极限 $E=\varprojlim E_\alpha$ 上的局部凸拓扑以

$$\{p\circ u_\alpha \mid \alpha\in A_0,\ p\in S_\alpha\}$$

为连续拟范数基。其中 A_0 是 A 的共尾子集*)。

证　由性质(Ⅰ)，$\{p\circ u_\alpha \mid \alpha\in A,\ p\in S_\alpha\}$ 是 $\varprojlim E_\alpha$ 上的连续拟范数子基。设 $q(x)$ 是 $\varprojlim E_\alpha$ 上任一连续拟范数，则必存在有限个 $p_{\alpha_1}\in S_{\alpha_1}$，$p_{\alpha_2}\in S_{\alpha_2}$，…，$p_{\alpha_n}\in S_{\alpha_n}$，以及正数 c_1，…，c_n，使得

$$q(x)\leqslant c_1\cdot p_{\alpha_1}\circ u_{\alpha_1}(x)+\cdots+c_n p_{\alpha_n}\circ u_{\alpha_n}(x).$$

因为 A_0 是定向半序集 A 的共尾子集，所以必存在 $\alpha\in A_0$，使得 $\alpha\geqslant\alpha_1$，…，α_n。由于(6)式可得

$$p_{\alpha_i}\circ u_{\alpha_i}(x)=p_{\alpha_i}\circ u_{\alpha_i\alpha}\circ u_\alpha(x),\ x\in E.$$

而 $p_{\alpha_i}\circ u_{\alpha_i\alpha}$ 是 E_α 上的连续拟范数，所以对适当的 $p\in S_\alpha$，$c>0$，有

$$q(x)\leqslant cp\circ u_\alpha(x),\ x\in E.$$

即 $\{p\circ u_\alpha \mid \alpha\in A_0,\ p\in S_\alpha\}$ 是 E 上一组连续拟范数基。

定理 2　设 E 是局部凸空间的投影系 $(E_\alpha, u_{\alpha\beta})$ 的拓扑投影极限，$E=\varprojlim E_\alpha$，设 Γ 是定向足标集合 A 的共尾子集。则

$$(E_\gamma, u_{\gamma\delta})(\gamma、\delta\in\Gamma,\ \delta\geqslant\gamma)$$

是局部凸空间的投影系。记它的投影极限为 $E^+=\varprojlim E_\gamma$，则 E^+ 和 E 拓扑同构。

证　先作如下对应：对每一个 $x\in\varprojlim E_\alpha$，$x=(x_\alpha)$，$\alpha\in A$，对应 E^+ 中的元 $x^+=(x_\gamma)$，$\gamma\in\Gamma$。相反地，如 $x^+=(x_\gamma)\in E^+$，对于每个 $\alpha\in A$，由于 Γ 是 A 的共尾子集，必存在 $\gamma\in\Gamma$，使 $\gamma\geqslant\alpha$。令

$$x_\alpha=u_{\alpha\gamma}x_\gamma,$$

则由式(3)和(4)，x_α 不依靠于 γ 的选取。这样，对每个 $x^+\in E^+$，

---

*) 定向半序集 A 的子集 A_0 叫做共尾的子集，是指对于每个 $\alpha\in A$，必存在 $\alpha_0\in A_0$ 使 $\alpha_0\geqslant\alpha$.

唯一地定义 (x_α)，$\alpha\in A$，并且对于 $\beta\geqslant\alpha$ 满足关系 $x_\alpha=u_{\alpha\beta}x_\beta$，所以 $x=(x_\alpha)\in E$。易知在上述对应下，E^+ 和 E 是代数同构的。

由性质(V)立即知道，E^+ 和 E 是拓扑同构的。证毕。

设 $(E_\alpha, u_{\alpha\beta})$ 是局部凸空间的投影系。由于 $u_{\alpha\beta}(\beta\geqslant\alpha)$ 是连续线性映照，若 p_α，$\alpha\in A$ 是 $\prod\limits_{\alpha\in A}E_\alpha$ 到 E_α 的投影映照，则由(4)式 $x\in\varprojlim E_\alpha$ 的充要条件是：当 $\beta\geqslant\alpha$ 时，$p_\alpha x=u_{\alpha\beta}p_\beta x$，即

$$\varprojlim E_\alpha=\bigcap_{\beta\geqslant\alpha}N(p_\alpha-u_{\alpha\beta}p_\beta).$$

所以拓扑投影极限 $\varprojlim E_\alpha$ 是乘积空间 $\prod\limits_{\alpha\in A}E_\alpha$ 的闭线性子空间。于是由性质(IV)，就得到下述定理：

定理 3 设 E_α，$\alpha\in A$ 是完备的(有界完备)局部凸空间，那末拓扑投影极限 $\varprojlim E_\alpha$ 是完备的(相应地有界完备)。

在本章§1中的定理3中我们证明了每一个分离的局部凸空间 E 同构于 Banach 空间的乘积空间的线性子空间，如果用拓扑投影极限的概念，则可改述如下：

定理 4 每个分离的局部凸空间 E 拓扑同构于 Banach 空间 $\tilde{E}_\alpha$ 的投影极限的稠线性子空间。如果 E 是完备的，则 E 同构于 $\tilde{E}_\alpha$ 的投影极限。

证 在此沿用§1中的定理3中的记号，设 $\{p_\alpha, \alpha\in A\}$ 是 E 上的连续拟范数基，$\tilde{E}_\alpha$ 是相应的 Banach 空间。对于足标集合 A，按照如下关系定向：如果 $p_\beta(x)\geqslant p_\alpha(x)$，$x\in E$，则认为 $\beta\geqslant\alpha$。E 中的恒等映照可看作连续线性映照

$$u_{\alpha\beta}:\ E_\beta\longrightarrow E_\alpha,\ \beta\geqslant\alpha.$$

按照连续性，$u_{\alpha\beta}$ 可以唯一地延拓为映照 $\tilde{u}_{\alpha\beta}:\tilde{E}_\beta\longrightarrow\tilde{E}_\alpha$。容易知道 $(\tilde{E}_\alpha,\tilde{u}_{\alpha\beta})$ 是 Banach 空间的投影系。由于 E 是分离的局部凸空间，如果对每个 $\alpha\in A$ 均有 $p_\alpha(x)=0$，则 $x=0$，所以 E 到乘积空间 $\prod\limits_{\alpha\in A}\tilde{E}_\alpha$ 的映照 T

$$T:\ x\longrightarrow\hat{x}=(\hat{x}_\alpha)\in\varprojlim\tilde{E}_\alpha$$

是一一映照。在 T 映照下 E 拓扑同构于 $\prod_{\alpha\in A}\tilde{E}_\alpha$ 的子空间。由于

$$T(E)\subset \varprojlim \tilde{E}_\alpha,$$

所以也可以说 E 同构于 $\varprojlim \tilde{E}_\alpha$ 的子空间。

下面只要证明 E 在 $\varprojlim \tilde{E}_\alpha$ 中是稠密的。记 $\varprojlim \tilde{E}_\alpha$ 到 $\tilde{E}_\alpha$ 上的投影为 u_α，则 $\{\hat{p}_\alpha, \alpha\in A\}$ 是 $\varprojlim \tilde{E}_\alpha$ 上的连续拟范数基，其中

$$\hat{p}_\alpha(\hat{x})=\hat{p}_\alpha(u_\alpha\hat{x}),\quad \hat{x}\in \varprojlim \tilde{E}_\alpha.$$

设 $\hat{x}\in \varprojlim \tilde{E}_\alpha$，对每个 $\hat{p}_\alpha$ 及 $\varepsilon>0$，由于 E_α 在 $\tilde{E}_\alpha$ 中是稠密的，可取到 $y\in E$，使得

$$\hat{p}_\alpha(\hat{x}-Ty)=\hat{p}_\alpha(u_\alpha\hat{x}-\hat{y}_\alpha)\leqslant\varepsilon.$$

由此得知 E 在 $\varprojlim \tilde{E}_\alpha$ 中是稠密的。

如果 E 是完备的，则空间 E(严格讲，是 $T(E)$) 是局部凸空间 $\varprojlim \tilde{E}_\alpha$ 的完备子空间，所以是闭的。由此 $T(E)=\varprojlim \tilde{E}_\alpha$。即 E 拓扑同构于 $\tilde{E}_\alpha$ 的投影极限。证毕。

推论 1　每个局部凸 Frechet 空间拓扑同构于 Banach 空间序列的投影极限。相反地，局部凸 Frechet 空间序列的投影极限是局部凸 Frechet 空间。

证　后一结论可以由性质(Ⅴ)和定理 3 得到。

最后，顺便指出：对于分离的局部凸空间 E，$\varprojlim \tilde{E}_\alpha$ 可以看作 E 的完备化空间或 E 的完备包。

§6　局部凸空间的归纳拓扑和归纳极限

设 E 和 $E_\alpha(\alpha\in A)$ 是线性空间，$\mathscr{T}_\alpha$ 是 E_α 上的分离的局部凸向量拓扑，$g_\alpha:E_\alpha\longrightarrow E(\alpha\in A)$ 是 E_α 到 E 的线性映照。则 E 上满足下述条件的最强局部凸向量拓扑 $\mathscr{T}_i$：使得每个线性映照 $g_\alpha(\alpha\in A)$ 都是 $(E_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$ 到 E 中的连续映照，称为 E 上关于族

$\{(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha, g_\alpha), \alpha\in A\}$ 的局部凸归纳拓扑，或简称归纳拓扑。

这样的归纳拓扑总是存在的。事实上，令 Φ 是 E 上这样的局部凸向量拓扑全体，使得每个线性映照 $g_\alpha(\alpha\in A)$ 是连续的。因为 E 上的平凡拓扑(即 E 中的开集只有 Φ 和 E)总是属于 Φ，集合 Φ 不是空的。令 $\mathscr{T}=\bigvee\Phi$(Φ 的上界)。如果局部凸向量拓扑 $T\in\Phi$ 由拟范数族 $\mathscr{P}_T$ 决定，那末 $\bigvee\Phi$ 拓扑由拟范数族 $\cup\{\mathscr{P}_T, T\in\Phi\}$ 决定。很明显，局部凸拓扑 $\mathscr{T}=\bigvee\Phi$ 就是 E 上关于族 $\{(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha, g_\alpha), \alpha\in A\}$ 的归纳拓扑。(注意：作为 Φ 的上界，$\mathscr{T}$ 也可看作 E 上关于 $\{(E, T, I), T\in\Phi\}$ 的投影拓扑)。

上述定义的归纳拓扑不一定满足分离性。虽然本节总假定 $(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 满足分离性，但也不能保证归纳拓扑是分离的。

记 $g_\alpha(E_\alpha)(\alpha\in A)$ 为 g_α 的值域。下面仅讨论在归纳拓扑的定义中真正有意义的情形。假定 E 为由 $\cup\{g_\alpha(E_\alpha), \alpha\in A\}$ 张成的线性空间。由定义，E 上的归纳拓扑 $\mathscr{T}_i$ 在 0 点的环境基由所有满足下述条件的集合 U 组成：U 是 E 中的均衡凸吸收集，并且对每一个 $\alpha\in A$，$g_\alpha^{-1}(U)$ 是 $(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 中 0 的环境。由于假定 E 是

$$\cup\{g_\alpha(E_\alpha), \alpha\in A\}$$

的线性包，E 中归纳拓扑在 0 的环境基也可由所有如下集合组成：

$$\Gamma_\alpha g_\alpha(U_\alpha), \tag{1}$$

其中 U_α 是 $(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 中 0 的环境基中的任一环境。

定理 1 设 v 是线性空间 E 到局部凸空间 F 中的线性映照，则 v 关于 E 上归纳拓扑 $\mathscr{T}_i$ 是连续的充要条件为：对每一个 $\alpha\in A$，映照 $v\circ g_\alpha$ 是 $(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 到 F 的连续映照。

证 条件的必要性是清楚的。下面证明充分性。设对每一个 $\alpha\in A$，$v\circ g_\alpha$ 是连续的，W 是 F 中 0 的任一均衡凸环境，则

$$(v\circ g_\alpha)^{-1}W=g_\alpha^{-1}[v^{-1}(W)]$$

是 E_α 中 0 的环境，这说明 $v^{-1}(W)$ 是 E 上 0 的归纳拓扑环境。证毕。

例 1 商拓扑。设 $(E, \mathscr{T})$ 是局部凸空间，M 是 E 的闭线性子空间。作商拓扑空间 E/M，则 E/M 是分离的局部凸空间。记

θ 为 E 到 E/M 的自然映照，则 E/M 上的商拓扑即是关于 $(E, \mathscr{T}, \theta)$ 的归纳拓扑。这可以由商拓扑的定义直接得知。

例 2 设 Y 是线性空间，$\{T_\alpha, \alpha\in A\}$ 是 Y 上一族局部凸向量拓扑。记 $Y_\alpha=(Y, T_\alpha)$，取 $g_\alpha: Y_\alpha \longrightarrow Y$ 为恒等映照，则 Y 上关于族 $\{(Y_\alpha, T_\alpha, g_\alpha), \alpha\in A\}$ 的归纳拓扑是弱于每个 $T_\alpha(\alpha\in A)$ 的最强局部凸向量拓扑，可记作 $\wedge\{T_\alpha, \alpha\in A\}$。

对于局部凸向量拓扑可以由连续拟范数全体决定。设 $(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)(\alpha\in A)$ 上连续拟范数全体为 S_α，$\mathscr{T}_i$ 是 E 上的关于族

$$\{(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha, g_\alpha), \alpha\in A\}$$

的归纳拓扑，$(E, \mathscr{T}_i)$ 上的连续拟范数全体记为 S，则由定义知：

(I) p 是 $(E, \mathscr{T}_i)$ 上的连续拟范数的充要条件为：对于每个 $\alpha\in A$，$p\circ g_\alpha$ 是 $(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 上的连续拟范数。

局部凸直接和拓扑

设 $\{(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha), \alpha\in A\}$ 是一族局部凸空间，作乘积空间

$$E=\Pi\{E_\alpha, \alpha\in A\},$$

每个 E_α 可以看作 E 的子空间，只要把每个 $x\in E_\alpha$ 看作 E 中的元 $y=(y_\beta)$，其中 $y_\alpha=x$，当 $\beta\neq\alpha$ 时，$y_\beta=0$。记 E_α 到 E 的嵌入映照为 l_α。考虑 E 中由 $\{E_\alpha, \alpha\in A\}$ 张成的线性子空间，记为

$$\oplus\{E_\alpha, \alpha\in A\},$$

则 $y=(y_\alpha)\in\oplus\{E_\alpha, \alpha\in A\}$ 的充要条件是 $y_\alpha(\alpha\in A)$，除了有限多个 α 外为 0。乘积空间 E 的线性子空间 $\oplus\{E_\alpha, \alpha\in A\}$ 称为线性空间 $\{E_\alpha, \alpha\in A\}$ 的直接和。如果 A 是有限个元的足标集合，则

$$\oplus\{E_i, i=1, \cdots, n\}=\Pi\{E_i, i=1, \cdots, n\}.$$

如果在线性空间 $\oplus\{E_\alpha, \alpha\in A\}$ 上引入关于嵌入映照

$$l_\alpha: E_\alpha \longrightarrow \oplus\{E_\alpha, \alpha\in A\}$$

的局部凸归纳拓扑，即关于族 $\{(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha, l_\alpha), \alpha\in A\}$ 的局部凸归纳拓扑，称为 $\oplus\{E_\alpha, \alpha\in A\}$ 上的局部凸直接和拓扑，或简称直接和拓扑，记为 T_d。换句话说，T_d 是 $\oplus\{E_\alpha, \alpha\in A\}$ 上满足下述条件的最强局部凸向量拓扑，使得在每个 $E_\alpha(\alpha\in A)$ 上的限制粗于

(或等于)E_α 上的拓扑 $\mathscr{T}_\alpha$。而$(\oplus\{E_\alpha, \alpha\in A\}, T_d)$称为$(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ $(\alpha\in A)$ 的局部凸直接和线性拓扑空间，或简称为直接和，并简记为 $\underset{\alpha\in A}{\oplus} E_\alpha$。

(II) 设$\{(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha), \alpha\in A\}$是一族局部凸空间，$\oplus\{E_\alpha, \alpha\in A\}$上的局部凸直接和拓扑为$T_d$，则 T_d 在 E_α 上的限制等于拓扑 $\mathscr{T}_\alpha$，即 $T_d|E_\alpha=\mathscr{T}_\alpha(\alpha\in A)$。$T_d$ 是满足此性质的最强局部凸拓扑。

证 由于$\Pi\{E_\alpha, \alpha\in A\}$ 上的乘积拓扑是使每个线性映照 l_α 连续的局部凸拓扑，按照 $\oplus\{E_\alpha, \alpha\in A\}$ 上直接和拓扑 T_d 的定义，T_d 强于 ΠE_α 上乘积拓扑在 $\oplus E_\alpha$ 上的限制。由于 ΠE_α 上乘积拓扑在 E_α 上的限制为 $\mathscr{T}_\alpha$，所以 $T_d|E_\alpha\supset\mathscr{T}_\alpha$，又按定义 $T_d|E_\alpha\subset\mathscr{T}_\alpha$，所以$T_d|E_\alpha=\mathscr{T}_\alpha$，(II)中最后的结论可由 T_d 的定义得到。证毕。

设 $S_\alpha(\alpha\in A)$ 是局部凸空间 $(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$上的连续拟范数的一组基，则

(III) 在局部凸直接和空间 $\oplus\{E_\alpha, \alpha\in A\}$ 上，由下述拟范数全体组成 $\oplus E_\alpha$ 上的连续拟范数基：

$$p(x)=\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha p_\alpha(x_\alpha),\ x\in\oplus E_\alpha, \tag{2}$$

其中 $\lambda_\alpha\geqslant 0$，$p_\alpha\in S_\alpha$，$x=(x_\alpha)\in\oplus E_\alpha$。

因此，如果对每个 $\alpha\in A$，$\mathscr{T}_\alpha$ 是分离的，则在 $\oplus\{E_\alpha, \alpha\in E\}$上的局部凸直接和拓扑 T_d 也满足分离性。

证 设 $\oplus E_\alpha$ 上拟范数 $p(x)$ 可表为式(2)。由于对每个

$$\alpha\in A,\ (p\circ l_\alpha)(x_\alpha)=\lambda_\alpha p_\alpha(x_\alpha),\ x_\alpha\in E_\alpha$$

是 E_α 上的连续拟范数。由性质(I)知 $p(x)$ 是 $\oplus E_\alpha$ 上的连续拟范数。相反地，如果 $p(x)$ 是 $\oplus E_\alpha$ 上的连续拟范数，则 $p\circ l_\alpha$ $(\alpha\in A)$ 是 $(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 上的连续拟范数。由假定 S_α 是 E_α 上连续拟范数基，必存在 $\lambda_\alpha>0$，$p_\alpha\in S_\alpha$，使得

$$p\circ l_\alpha(x_\alpha)\leqslant\lambda_\alpha p_\alpha(x_\alpha),\ x_\alpha\in E_\alpha.$$

则对每一个 $x\in\oplus E_t$，有

$$p(x)\leqslant\sum_{\alpha\in A}p\circ l_\alpha(x_\alpha)\leqslant\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha p_\alpha(x_\alpha).$$

所以形式(2)的拟范数组成 $\oplus E_\alpha$ 上的连续拟范数基。

分离性结论由(2)和§1中的性质(I)即可知。证毕。

定理 2　每个局部凸归纳拓扑都是局部凸直接和拓扑的商拓扑。

证　设$(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)(\alpha\in A)$是一族局部凸空间，

$$g_\alpha: E_\alpha \longrightarrow E,\ \alpha\in A$$

是 E_α 到线性空间 E 上的线性映照。设 E 上关于族 $\{(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha, g_\alpha), \alpha\in A\}$的归纳拓扑为 T_i。作 $\oplus E_\alpha$ 到 E 的线性映照

$$\oplus g_\alpha:\ x\longmapsto\sum_{\alpha\in A}g_\alpha(x_\alpha),\tag{3}$$

其中 $\oplus g_\alpha$ 表示这个线性映照的记号，$x=(x_\alpha)\in\oplus E_\alpha$。实际上(3)式右端求和至多为有限项。由(3)得

$$g_\alpha=(\oplus g_\alpha)\circ l_\alpha.\tag{4}$$

其中 l_α 是 E_α 到 $\oplus E_\alpha$ 的嵌入映照。设 $p(x)$ 是 (E, T_i) 上的拟范数，由性质(I)，$p(x)$ 是连续的充要条件为：对每个 $\alpha\in A$，

$$p\circ g_\alpha(x_\alpha)=p\circ(\oplus g_\alpha)\circ l_\alpha(x_\alpha),\ x_\alpha\in E_\alpha\tag{5}$$

是 E_α 上的连续拟范数。考虑映照 $p\circ\oplus g_\alpha$，由于 $\oplus E_\alpha$ 上直接和拓扑 T_d 是关于族 $\{(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha, l_\alpha), \alpha\in A\}$的局部凸归纳拓扑，由(5)式即知，$p(x)$ 是 (E, T_i) 上连续拟范数的充要条件为：$p\circ\oplus g_\alpha$ 是 $(\oplus E_\alpha, T_d)$上的连续拟范数。所以 $\oplus g_\alpha$ 是$(\oplus E_\alpha, T_d)$到(E, T_i)的连续开映照。令

$$N(\oplus g_\alpha)=\{x\in\oplus E_\alpha\,|\,(\oplus g_\alpha)x=0\},\tag{6}$$

则由 $\oplus g_\alpha$ 导出一个 $\oplus E_\alpha/N$ 到 (E, T_i) 上的一一映照，并且在这个映照下，$\oplus E_\alpha/N$ 和 (E, T_i) 拓扑同构。证毕。

系　设$(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)(\alpha\in A)$是分离的局部凸空间。则 E 上关于族 $\{(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha, g_\alpha), \alpha\in A\}$ 的局部凸归纳拓扑 T_i 是分离的充要条件为 $N(\oplus g_\alpha)$ 是局部凸直接和空间$(\oplus E_\alpha, T_d)$中的闭集。

定理 3　设 $E_\alpha(\alpha\in A)$ 是局部凸空间，则局部凸直接和空间 $(\oplus E_\alpha, T_d)$ 是完备(序列完备)的充要条件为：对于每一个 $\alpha\in A$，

局部凸空间 E_α 是完备的(相应地,序列完备)。

证 必要性:设 $E=\oplus E_\alpha$ 是完备的。由于局部凸直接和拓扑空间 E 到 $E_\alpha(\alpha\in A)$ 的投影 p_α 是连续的,因此每一个 $E_\alpha(\alpha\in A)$ 都是 E 中的闭子集,从而每个 E_α 必须是完备的。

充分性:设每个 $E_\alpha(\alpha\in A)$ 是完备的。记 T_Π 为 $E_\alpha(\alpha\in A)$ 的乘积拓扑在 $\oplus E_\alpha$ 上的限制。令 T_d 为 $\oplus E_\alpha$ 上局部凸直接和拓扑,则

$$T_\Pi\subset T_d. \tag{7}$$

设 $\{x_\nu\}$ 是 $(\oplus E_\alpha, T_d)$ 中的基本定向点列。由于 $T_\Pi\subset T_d$, $\{x_\nu\}$ 也是乘积空间 $\Pi\{E_\alpha, \alpha\in A\}$ 中的基本定向点列。因为 $E_\alpha(\alpha\in A)$ 是完备的,根据第一章 §6,乘积拓扑空间 $\Pi\{E_\alpha, \alpha\in A\}$ 是完备的。所以必存在 $a\in\Pi E_\alpha$,使得

$$x_\nu\to a\text{(按乘积拓扑)}.$$

下面先证明 $a\in\oplus E_\alpha$。设 $a=(a_\alpha)$, $x_\nu=(x_\alpha^\nu)$。对于每个 $\alpha\in A$,如果 $a_\alpha\neq 0$,选取 E_α 中 0 的均衡闭环境 U_α,使得 $a_\alpha\bar{\in}U_\alpha$;如果 $a_\alpha=0$,则取 $U_\alpha=E_\alpha$。然后令

$$V=\Gamma_\alpha U_\alpha\subset\oplus E_\alpha.$$

则根据式(1), V 是 $(\oplus E_\alpha, T_d)$ 中 0 的环境。由于 x_ν 是基本定向点列,必定存在 ν_0,使得

$$\nu\geqslant\nu_0\Rightarrow x_\nu-x_{\nu_0}\in V.$$

取投影即知:对于每个 $\alpha\in A$,当 $\nu\geqslant\nu_0$ 时, $x_\alpha^\nu-x_\alpha^{\nu_0}\in U_\alpha$。由于 U_α 是 E_α 中的闭集,对 ν 取极限,得到

$$a_\alpha-x_\alpha^{\nu_0}\in U_\alpha. \tag{8}$$

因 $x_{\nu_0}\in\oplus E_\alpha$,所以 $x_\alpha^{\nu_0}(\alpha\in A)$除有限多个足标以外为 0。由(8)知 $a_\alpha(\alpha\in A)$除了有限多个足标外属于 U_α。按照 U_α 的取法, $a_\alpha(\alpha\in A)$中非零项至多有有限个,所以$a\in\oplus E_\alpha$。因此在$(\oplus E_\alpha, T_\Pi)$中$x_\nu\to a$。

为了证明$(\oplus E_\alpha, T_d)$是完备的,只要证明 $x_\nu\xrightarrow{T_d}a$。由第一章 §5 中的定理 2,只要证明关于局部凸直接和拓扑 T_d,存在 0 的一组环境基$\mathscr{V}$,使得其中的每个环境关于 T_Π 是闭的。

设V是$[\Gamma_\alpha W_\alpha]^-_{T_d}$,即 $\cup\{W_\alpha, \alpha\in A\}$ 在 $(\oplus E_\alpha, T_d)$ 中的均衡

凸闭包，其中每个 $\alpha\in A$，$W_\alpha\in\mathscr{N}(E_\alpha)$。那末这种 V 的全体组成 0 的 T_d 拓扑环境基，下面将证明 V 关于 T_Π 拓扑是闭的。

设 y 属于 V 关于拓扑 T_Π 的闭包 $[V]^-_{T_\Pi}$，记 $y=(y_\alpha)\in\oplus E_\alpha$。如果 $y=0$，那末 $y\in V$。如果 $y\neq 0$，令 $F=\{\alpha,\ y_\alpha\neq 0\}$，$F$ 是一个有限点集。记 $E_F=\oplus\{E_\alpha,\ \alpha\in F\}$，则容易知道，在 E_F 上的拓扑 T_d 和 T_Π 是一致的。如果能够证明 $y\in[V\cap E_F]^-_{T_\Pi}$，则由

$$y\in[V\cap E_F]^-_{T_\Pi}=[V\cap E_F]^-_{T_d}\subset[V]^-_{T_d}=V$$

就可知道，V 关于 T_Π 拓扑是闭集。

设 U 是 0 的任一 T_Π 拓扑环境。由于 $y\in[V]^-_{T_\Pi}$，则

$$(y+U)\cap V\neq\varnothing.$$

设 $x=(x_\alpha)\in\oplus E_\alpha$，$x\in(y+U)\cap V$。重新定义 $x'=(x'_\alpha)$，当 $\alpha\in F$ 时，令 $x'_\alpha=x_\alpha$；当 $\alpha\,\overline{\in}\,F$ 时，令 $x'_\alpha=0$。则容易知道仍有 $x'\in(y+U)\cap V$，并且 $x'\in E_F$。由此 $y\in[V\cap E_F]^-_{T_\Pi}$。证毕。

对于序列完备情形的证明是类似的。

例 3　设 E 是复(或实)的线性空间，$\{x_\alpha,\ \alpha\in A\}$ 是一组 Hamel 基。则 E 代数同构于直接和 $\oplus K_\alpha$，其中 $K_\alpha\ (\alpha\in A)$ 是复(或实)的一维向量空间，并赋以通常的拓扑。因为对于 E 上的任一局部凸向量拓扑，K_α 到 E 的嵌入映照总是连续的，所以 $E=\oplus K_\alpha$ 上的局部凸直接和拓扑是线性空间 E 上的最强局部凸向量拓扑，它是由 E 上的所有拟范数族决定的。由定理 3，E 关于其上的最强局部凸向量拓扑是完备的。

定理 4　设 B 是局部凸直接和空间 $\underset{\alpha\in A}{\oplus}E_\alpha$ 中的子集。则 B 是有界的充要条件为：存在有限足标集合 $F\subset A$，使得 B 是 $\oplus\{E_\alpha,\ \alpha\in F\}$ 中的有界集。

证　必要性：设 B 是 $\oplus\{E_\alpha,\ \alpha\in A\}$ 中的有界集。由于 $\oplus E_\alpha$ 到子空间 E_α 的投影 p_α 是连续的，所以 $p_\alpha(B)$ 是 E_α 中的有界集合。下面证明必存在有限足标集合 $F\subset A$，使得

$$\alpha\,\overline{\in}\,F\Rightarrow p_\alpha(B)=\{0\}.$$

我们用反证法证明：如果不然，则存在一个无限子集 $A_1\subset A$，但是

当 $\alpha\in A_1$ 时，$p_\alpha(B)\neq\{0\}$。任取一列 $\{\alpha_n, n\in N\}\subset A_1$。则存在一列元 $y^{(n)}\in B$，$y^{(n)}=(y_\alpha^{(n)})$ $(\alpha\in A)$，使得 $y_{\alpha_n}^{(n)}\neq 0$。由于 $(E_{\alpha_n}, \mathscr{T}_{\alpha_n})$ 是分离的，必存在均衡凸环境 $V_n\in\mathscr{N}(E_{\alpha_n})$，使得

$$y_{\alpha_n}^{(n)}\overline{\in} nV_n \quad (n=1, 2, \cdots) \tag{9}$$

对每个 $\alpha\in A$，取 $V_\alpha\in\mathscr{N}(E_\alpha)$，要求当 $\alpha=\alpha_n$ 时，取 $V_{\alpha_n}=V_n$。令

$$U=\Gamma_\alpha V_\alpha,$$

则 $U\in\mathscr{N}(T_d)$。但是由(9)式知 $n^{-1}y^{(n)}\overline{\in}U(n=1, 2, \cdots)$，这和 B 是 $(\oplus E_\alpha, T_d)$ 中的有界集相矛盾。因此，存在有限集合 $F\subset A$，使得 $B\subset\oplus\{E_\alpha, \alpha\in F\}$，容易知道：$\oplus\{E_\alpha, \alpha\in F\}$ 是 $\oplus\{E_\alpha, \alpha\in A\}$ 的拓扑子空间，所以 B 是 $\oplus\{E_\alpha, \alpha\in F\}$ 中的有界集。

充分性是明显的。证毕。

系 有界完备的局部凸空间的局部凸直接和是有界完备的。

例 4 设 $\{E_n\}$ 是一列 Banach 空间，则局部凸直接和空间 $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} E_n$ 是完备的局部凸空间，但不是第二纲的。事实上，很容易找到一列有界闭集 $B_k(k=1, 2, \cdots)$，使得

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} E_n=\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

每个 B_k 都被包含在有限直接和中。设 U 是 $\oplus E_n$ 中 0 的任一环境，则对于每个 $E_k(k=1, 2, \cdots)$，$U\cap E_k$ 是 E_k 中 0 的环境，都不会是单点集 $\{0\}$，所以每个 B_k 都不包含内点，因此，$\oplus E_n$ 是第一纲集。由 Baire 定理知：$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} E_n$ 一定不是可距离化的。

局部凸归纳极限

设 $\{E_\alpha, \alpha\in A\}$ 是一族局部凸空间（线性空间），其中 A 是定向点集。对于每一对 $\alpha\leqslant\beta$，定义一个连续线性映照（相应地线性映照）$h_{\beta\alpha}: E_\alpha\to E_\beta$，满足下述关系

(a) $h_{\alpha\alpha}=I$, $\alpha\in A$; (10)

(b) $h_{\gamma\alpha}=h_{\gamma\beta}\circ h_{\beta\alpha}$, $\gamma\geqslant\beta\geqslant\alpha$. (11)

则称 $(E_\alpha, h_{\beta\alpha})$ 为局部凸空间（相应地线性空间）E_α 的归纳系。

当A是自然数列的情形，归纳系称为局部凸空间(相应地线性空间)的归纳序列，可以用图式表示为

$$E_1 \xrightarrow{h_{21}} E_2 \xrightarrow{h_{32}} E_3 \to \cdots.$$

定义　设$(E_\alpha, h_{\beta\alpha})$是线性空间的归纳系，记

$$F = \bigoplus_{\alpha\in A} E_\alpha,$$

$l_\alpha(\alpha\in A)$表示E_α到F的典型嵌入。H表示$\oplus E_\alpha$中的线性子空间，它由如下形式的元素全体张成：

$$l_\alpha(x_\alpha) - l_\beta(h_{\beta\alpha}(x_\alpha)),\ x_\alpha\in E_\alpha,\ \beta\geqslant\alpha. \tag{12}$$

作商线性空间$\oplus E_\alpha/H$。则称$\oplus E_\alpha/H$为$\{E_\alpha, \alpha\in A\}$关于映照$h_{\beta\alpha}$的归纳极限，记为$\varinjlim h_{\beta\alpha}E_\alpha$，或简记为$\varinjlim E_\alpha$。

(IV)　上述子空间H由所有如下形式的元组成：

$$l_{\alpha_1}(x_{\alpha_1}) + \cdots + l_{\alpha_m}(x_{\alpha_m}) \quad (\alpha_1, \cdots, \alpha_m\in A), \tag{13}$$

其中$x_{\alpha_j}\in E_{\alpha_j}(j=1, 2, \cdots m)$。并且存在一个$\beta$，使得当$\beta\geqslant\alpha_1, \cdots, \alpha_m$时，满足下述等式：

$$h_{\beta\alpha_1}(x_{\alpha_1}) + \cdots + h_{\beta\alpha_m}(x_{\alpha_m}) = 0. \tag{14}$$

证　对于(12)形式的元$l_\alpha(x_\alpha) - l_\beta(h_{\beta\alpha}(x_\alpha))$，由于当$\gamma\geqslant\alpha$、$\beta$时，

$$h_{\gamma\alpha}(x_\alpha) + h_{\gamma\beta}(-h_{\beta\alpha}(x_\alpha)) = 0.$$

所以满足条件(13)与(14)。而H是这样的元的线性组合，所以H中的元满足条件(13)与(14)。

反之，如果$\oplus E_\alpha$中(13)形式的元满足式(14)，则

$$l_{\alpha_1}(x_{\alpha_1}) + \cdots + l_{\alpha_m}(x_{\alpha_m}) = \sum_{j=1}^{m}(l_{\alpha_j}(x_{\alpha_j}) - l_\beta(h_{\beta\alpha_j}(x_{\alpha_j}))),$$

其中$\beta\geqslant\alpha_1, \cdots, \alpha_m$。由此它是$H$中的元。证毕。

由线性空间归纳极限的定义，对于每个$\alpha\in A$，典型嵌入l_α: $E_\alpha\to\oplus E_\alpha$导出一个典型线性映照$g_\alpha$: $E_\alpha\to\varinjlim E_\alpha$。由于(12)形式的元属于$H$，容易验证满足下述关系：

$$g_\alpha = g_\beta\circ h_{\beta\alpha}, \quad \beta\geqslant\alpha. \tag{15}$$

因而必须有

$$\beta \geqslant \alpha \Rightarrow g_\alpha(E_\alpha) \subset g_\beta(E_\beta). \tag{16}$$

并容易验证 $\varinjlim E_\alpha = \bigcup g_\alpha(E_\alpha)$。所以可以引入下述定义：

定义 设$(E_\alpha, h_{\beta\alpha})$是局部凸空间的归纳系。则在线性空间的归纳极限 $\varinjlim E_\alpha$ 上赋以关于 $\{(E_\alpha, g_\alpha); \alpha \in A\}$ 的局部凸归纳拓扑，称为$(E_\alpha, h_{\beta\alpha})$的局部凸归纳极限，仍记为 $\varinjlim E_\alpha$。

必须注意：局部凸归纳拓扑不一定满足分离公理。

例 5 局部凸空间族$\{E_\alpha, \alpha \in A\}$的局部凸直接和就是局部凸归纳极限的一个例子。设$\mathscr{F}$表示$A$的所有有限子集全体。按包含关系$\subset$定向，规定

$$F_1 \leqslant F_2 \Longleftrightarrow F_1 \subset F_2, \ F_1、F_2 \in \mathscr{F}.$$

对每个 $F \in \mathscr{F}$，记 $E_F = \oplus\{E_\alpha, \alpha \in F\}$。对于 $F_1 \leqslant F_2$，规定 $h_{F_2F_1}$ 为 E_{F_1} 到 E_{F_2} 的典型嵌入，则 $\oplus\{E_\alpha, \alpha \in A\} = \varinjlim E_F$。

在定义归纳极限时，有时为了方便，直接把 E_α 看成 $\oplus E_\alpha$ 的子空间，而省去嵌入映照 l_α。如果在局部凸归纳系$(E_\alpha, h_{\beta\alpha})$中，对于所有 $\beta \geqslant \alpha$，$h_{\beta\alpha}: E_\alpha \to E_\beta$ 都是一一映照，则每个 $g_\alpha: E_\alpha \to \varinjlim E_\alpha$ 也是一一映照。所以线性空间 $E = \varinjlim E_\alpha$ 可看作和集 $\bigcup E_\alpha$，而 E_α 看作 E 的子空间。在应用中，下述归纳极限的特别情形是有用的，它相当于 $h_{\beta\alpha}$ 是一一映照的情况。

设 E 是一个线性空间，$\{E_\alpha, \alpha \in A\}$ 是 E 的一族子空间，当 $\alpha \neq \beta$ 时，$E_\alpha \neq E_\beta$。E_α 按包含关系$\subset$定向，并且

$$E = \bigcup\{E_\alpha, \alpha \in A\}.$$

足标集合 A 按如下规定的序关系也是定向集：

$$\beta \geqslant \alpha \Longleftrightarrow E_\alpha \subset E_\beta.$$

在每个 $E_\alpha(\alpha \in A)$ 上给定一个局部凸向量拓扑 $\mathscr{T}_\alpha$，使得当 $\beta \geqslant \alpha$ 时，E_α 上的拓扑 $\mathscr{T}_\alpha$ 强于 $(E_\beta, \mathscr{T}_\beta)$ 在 E_α 上的导出拓扑。用 $h_{\beta\alpha}$ 表示 E_α 到 E_β 的恒等嵌入，则 $h_{\beta\alpha}(\beta \geqslant \alpha)$ 是连续线性映照。用 g_α 表示 E_α 到 E 的自然嵌入。那末 E 上赋以关于族 $\{(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha, g_\alpha), \alpha \in A\}$的局部凸归纳拓扑 T_i 称为子空间族 $\{(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha), \alpha \in A\}$ 的

归纳极限。如果对所有的$\beta\geqslant\alpha$，$\mathscr{T}_\beta$在E_α上的导出拓扑等于$\mathscr{T}_\alpha$，则称子空间族的归纳极限是严格的。例如例5中的局部凸直接和拓扑就是E_F的严格归纳极限。

(V) 定义在局部凸空间的归纳极限$\varinjlim E_\alpha$上的拟范数$p(x)$是连续的充要条件为：对每一个$\alpha\in A_0$，$p\circ g_\alpha$是E_α上的连续拟范数，其中A_0是A的共尾子集。

证 只要证充分性：任取$\alpha\in A$，由于A_0是A的共尾定向子集，存在$\beta\in A_0$，使得$\beta\geqslant\alpha$。因为$g_\alpha=g_\beta\circ h_{\beta\alpha}$，$p\circ g_\alpha=p\circ g_\beta\circ h_{\beta\alpha}$。由假定$p\circ g_\beta$，$h_{\beta\alpha}$都是连续的，所以$p\circ g_\alpha(\alpha\in A)$是$E_\alpha$上的连续拟范数。由归纳拓扑的性质即知：$p(x)$是$E=\varinjlim E_\alpha$上的连续拟范数。证毕。

类似于投影极限的情形可以证明：

定理5 设$(E_\alpha, h_{\beta\alpha})(\alpha\in A)$是局部凸空间的归纳系，设$A_0$是$A$的共尾子集，则$(E_\gamma, h_{\delta\gamma})(\gamma\in A_0)$也是局部凸空间的归纳系，并且它的归纳极限$\varinjlim E_\gamma(\gamma\in A_0)$和$\varinjlim E_\alpha(\alpha\in A)$拓扑同构。

对于不满足分离性的局部凸空间，如果它对应的分离局部凸空间$E/\{0\}^-$是囿空间，则仍称E是囿空间。对于其它空间类，也可这样约定。

定理6 设$E_\alpha(\alpha\in A)$是囿空间，E是线性空间，g_α: $E_\alpha\to E$ $(\alpha\in A)$是线性映照，则E上关于$\{(E_\alpha, g_\alpha), \alpha\in A\}$的局部凸归纳拓扑是囿空间。

对于桶式空间(拟桶空间*)，可数桶式空间*)或可数拟桶空间*))相应的结论也成立。

证 我们仅对桶式空间的情形作证明；对其他空间类其证明是类似的。设$E_\alpha(\alpha\in A)$是桶式空间，T_i是E上关于$\{(E_\alpha, g_\alpha), \alpha\in A\}$的局部凸归纳拓扑。设$B$是$(E, T_i)$上任意一个桶。则由于$g_\alpha(\alpha\in A)$是连续线性映照，$g_\alpha^{-1}(B)$是$E_\alpha$中的桶。由$E_\alpha$是桶式空间，$g_\alpha^{-1}(B)$是$E_\alpha$中0的环境。由归纳拓扑定义就知道$B$是$(E, T_i)$

*) 定义可参见第三章§9.

中 0 的环境，所以(E, T_t)是桶式空间。证毕。

作为特例，有下述的系：

系 囿空间(桶式空间)关于闭子空间的商空间是囿空间（相应地，桶式空间）。由此囿空间(桶式空间)的可补子空间是囿空间(相应地，桶式空间)。

定理 7 每一个囿空间(E, T)是赋范空间的归纳极限。又如果(E, T)是序列完备的，则它是 Banach 空间的归纳极限。

证 令$\mathscr{B}$是囿空间(E, T)中均衡凸闭有界子集全体，对于每个$B\in\mathscr{B}$，作

$$E_B=\bigcup_{n=1}^{\infty} nB. \tag{17}$$

那末E_B是E的线性子空间。令$p_B(x)$是E_B中相应于B的 Minkowski 泛函，(E_B, p_B)是一个线性赋范空间，特别当(E, T)是序列完备时，(E_B, p_B)是一个 Banach 空间(第三章§7)。作恒等嵌入映照

$$\psi_B: E_B\to E. \tag{18}$$

由于B是(E, T)中的有界集，所以$p_B\supset T|_{E_B}$，这里p_B表示由它导出的拓扑。所以ψ_B, $B\in\mathscr{B}$是连续线性映照。当B_1、$B_2\in\mathscr{B}$，$B_1\subset B_2$时，$E_{B_1}\subset E_{B_2}$。设$\psi_{B_2B_1}$为恒等嵌入映照

$$\psi_{B_2B_1}: E_{B_1}\to E_{B_2}, \tag{19}$$

容易知道$\psi_{B_2B_1}$是连续的。$\mathscr{B}$按照包含关系“$\subset$”是一个定向半序集，则(E_B, ψ_{B_1B}) $(B\in\mathscr{B})$是一个赋范空间的归纳系。记它的局部凸归纳极限为$\varinjlim E_B$。根据定理 1，由恒等嵌入映照$\psi_B: E_B\to E$导出一个连续线性映照：$\varinjlim E_B\to E$。由于每一个$x\in E$总包含在某个E_B之中，所以这是一个线性空间$\varinjlim E_B$和E之间的同构映照。我们通常把对应的点看作是一样的。

下面只要证明$\varinjlim E_B$上的拓扑弱于(E, T)上的拓扑。设$p(x)$是$\varinjlim E_B$上的任一连续拟范数。由性质(V)，对每个$B\in\mathscr{B}$，把$p(x)$限制在E_B上是E_B上的连续拟范数，由此$p(x)$在每个

$B\in\mathscr{B}$ 上是有界的。由假设 E 是囿空间，所以在每个有界集上有界的拟范数 $p(x)$ 是 (E, T) 上连续拟范数。这就是说 $\varinjlim E_B$ 上的拓扑弱于 T。综合上述讨论，即知 E 在同构意义下是赋范空间 E_B $(B\in\mathscr{B})$ 的归纳极限。如果 (E, T) 又是序列完备的，这时，E_B 是 Banach 空间。则 E 是 Banach 空间的归纳极限。证毕。

注 由定理 6 和 7，我们可顺便得到下述结论：序列完备的囿空间是桶式空间。

定理 8*) 设 $(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ $(\alpha\in A)$ 是 Mackey 空间。E 上关于族 $\{(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha, g_\alpha), \alpha\in A\}$ 的归纳拓扑为 $\mathscr{T}_i$。如果 $(E, \mathscr{T}_i)$ 是分离的，则必是 Mackey 空间。

证 记 $E'=(E, \mathscr{T}_i)'$。考虑自然对偶 $\langle E, E'\rangle$。令 T 是 E 上的任一相容拓扑。由于映照

$$g_\alpha: (E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\to(E, \mathscr{T}_i) \quad (\alpha\in A)$$

是连续线性映照，根据第 4 章 §1 中的定理 5 的推论 3，将 g_α 看作 $(E_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 到 (E, T) 的映照也是连续的。所以由归纳拓扑的定义可知道 $T\subset\mathscr{T}_i$，即 $\mathscr{T}_i$ 是关于对偶 $\langle E, E'\rangle$ 的最强相容拓扑。证毕。

系* Mackey 空间关于闭线性子空间的商空间是 Mackey 空间。

定理 9* (DF) 空间序列 $\{E_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 的局部凸直接和空间 $\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 是 (DF) 空间。

证 设 B_{nj} $(j=1, 2, \cdots)$ 是 E_n 中的一列有界集，使 E_n 中的每个有界集能被其中的一个集吸收。令 I_n 为 E_n 到 $\oplus E_n$ 的嵌入映照。则 $\oplus E_n$ 中如下形式的集合

$$I_{n_1}(B_{n_1j_1})+\cdots+I_{n_k}(B_{n_kj_k})$$

是 $\oplus E_n$ 中可列个有界集。根据定理 4，$\oplus E_n$ 中每一个有界集能被其中一个集所吸收。同时根据定理 6，$\oplus E_n$ 是可数拟桶式空间，所以 $\oplus E_n$ 是一个 (DF) 空间。证毕。

---

*) 定理 8 和定理 9 可放在学完第三章后学习.

严格归纳极限

前面曾经引进过严格归纳极限的概念。但是这个概念过于一般。为了能得到较好的结果，只限于讨论可数的情形，它可以叙述如下：设E是一个线性空间，$\{E_n\}$是E中线性子空间的严格增序列：

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \cdots,$$

并且$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$。在每个$E_n$上赋以局部凸向量拓扑$\mathscr{T}_n$，并且对于每个$n \in N$总有

$$\mathscr{T}_{n+1} | E_n = \mathscr{T}_n,$$

记E_n到E中的恒等嵌入为g_n，则E上关于族$\{(E_n, \mathscr{T}_n, g_n);\ n=1, 2, \cdots,\}$的局部凸归纳拓扑$\mathscr{T}$，称为序列$\{E_n\}$的严格归纳极限。

例 6 设φ是有限序列全体组成的线性空间。对于$x \in \varphi$，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$。其中$x_n$除有限个以外为0。令

$$E_n = \{x \mid x_i = 0,\ 对于\ i > n\},$$

由于E_n是有限维空间，E_n上局部凸向量拓扑$\mathscr{T}_n$是唯一的，即是欧几里得拓扑。因为在φ上的任一局部凸向量拓扑在E_n上导出拓扑$\mathscr{T}_n$。φ上关于序列$\{E_n\}$的严格归纳极限拓扑就是φ上最强局部凸向量拓扑。

下面先证明几个引理：

引理 1 设(Y, T)是局部凸空间，X是Y的子空间，在X上取相对拓扑。设U是X中0的均衡凸环境。则一定存在均衡凸环境$V \in \mathscr{N}(Y)$，使得$V \cap X = U$。

证 取Y中0的均衡凸环境W，使得$W \cap X \subset U$。令

$$V = \Gamma(W \cup U),$$

容易知道$V \in \mathscr{N}(Y)$，并且$U \subset V \cap X$。下面证明相反的包含关系。设$x \in V \cap X$，则

$$x = rw + su,$$

其中$w \in W$，$u \in U$，$|r| + |s| \leqslant 1$。如果$r = 0$，则$x = su \in U$，

如果 $r\neq 0$，$w=\frac{1}{r}(x-su)\in X$。又由于 $w\in W$，所以

$$w\in W\cap X\subset U。$$

这样，就证明了 $V\cap X=U$。证毕。

引理 2　在引理 1 中，设 $y\in Y\backslash\bar{X}$，其中 $\bar{X}$ 表示 X 在 Y 中的闭包。于是可适当选择 V，使得 $V\cap X=U$，并且 $y\bar{\in}V$。

证　如果在引理 1 的证明中选取 Y 中 0 的均衡凸环境 W，使得 $W\cap X\subset U$，同时使 $y+W$ 和 X 不相交，那末相应的 V 即满足要求。事实上，如果 $y\in V$，那末 $y=rw+su$，其中 $w\in W$，$u\in U$，$|r|+|s|\leqslant 1$，将推得

$$y-rw=su\in(y+W)\cap U\subset(y+W)\cap X=\emptyset。$$

导致矛盾。证毕。

定理 10　设 $(E,\mathscr{T})$ 是序列 $\{(E_n,\mathscr{T}_n)\}$ 的严格归纳极限，则 $\mathscr{T}$ 在 E_n 上的导出拓扑 $\mathscr{T}_n$，即 $\mathscr{T}|_{E_n}=\mathscr{T}_n(n=1,2,\cdots)$。

证　设 $\mathscr{T}$ 在 E_n 上的导出拓扑为 $\mathscr{T}_n'$。按归纳拓扑的定义，E_n 到 E 的恒等嵌入是连续的，所以 $\mathscr{T}_n'\subset\mathscr{T}_n$。下面证明相反的包含关系：设 U_n 是 $(E_n,\mathscr{T}_n)$ 中 0 的均衡凸环境。由引理 1，存在 $(E_{n+1},\mathscr{T}_{n+1})$ 中 0 的均衡凸环境 U_{n+1}，使得

$$U_n=U_{n+1}\cap E_n。$$

按归纳法，可以构造集的增序列 $U_{n+k}(k=1,2,\cdots)$，使得 U_{n+k} 是 $(E_{n+k},\mathscr{T}_{n+k})$ 中 0 的均衡凸环境，并且

$$U_{n+k}=U_{n+k+1}\cap E_{n+k}\quad(k=1,2,\cdots)。$$

令

$$U=\bigcup_{k=1}^{\infty}U_{n+k},$$

则 U 是均衡凸集。下面证明 U 是 E 上的归纳极限拓扑 $\mathscr{T}$ 在 0 点的环境。事实上，对于 $1\leqslant m<n$，有

$$U_n\cap E_m\subset U\cap E_m,$$

由严格归纳极限的假定，$U_n\cap E_m$ 是 $(E_m,\mathscr{T}_m)$ 中 0 的环境。而对于 $m=n+k(k=0,1,2,\cdots)$ 情形，则

$$U_{n+k}\subset U\cap E_{n+k},$$

所以 $U\cap E_m$ 都是 $(E_m, \mathscr{T}_m)$ 中 0 的环境，即知 $U\in\mathscr{N}(E, \mathscr{T})$。但由于 $U\cap E_n=U_n$，即知 U_n 是 E_n 中 0 的 $\mathscr{T}'_n$ 拓扑环境，这样就证明了 $\mathscr{T}_n\subset\mathscr{T}'_n$。由此 $\mathscr{T}_n=\mathscr{T}'_n=\mathscr{T}|_{E_n}$。证毕。

系 设 $(E_n, \mathscr{T}_n)(n=1, 2, \cdots)$ 都是分离的局部凸空间。则增序列 $(E_n, \mathscr{T}_n)$ 的严格归纳极限 $(E, \mathscr{T})$ 也是分离的。

证 设 $x\in E$，$x\neq 0$，由于 $E=\bigcup E_n$，则必有某个 n，使得 $x\in E_n$。由于 $(E_n, \mathscr{T}_n)$ 是分离的，必存在 $U_n\in\mathscr{N}(E_n, \mathscr{T}_n)$，使得 $x\overline{\in}U_n$。

由定理 10，存在 $(E, \mathscr{T})$ 中 0 的环境 U，使得

$$U\cap E_n\subset U_n.$$

很明显，$x\overline{\in}U$，即 $(E, \mathscr{T})$ 是分离的。证毕。

对于严格归纳极限，下述情形更为重要，即是还要假定对于每个 $n=1, 2, \cdots$，E_n 是 E_{n+1} 中的闭集。特别当每个 E_n 是完备时，属于这种情形。下面主要讨论这种情形。

定理 11 设 E 是 E_n 的严格归纳极限。则 $E_n(n=1, 2, \cdots)$ 均是 E_{n+1} 中闭集的充要条件为每个 $E_n(n=1, 2, \cdots)$ 是 E 中的闭集。

证 充分性由定理 10 即知。

必要性：记 $[E_n]_E^-$ 为 E_n 在 E 中的闭包，设 $x\in[E_n]_E^-\subset E$，则必存在某个 $k>n$，使 $x\in E_k$。根据定理 10，$x\in[E_n]_{E_k}^-$，其中闭包在 E_k 中取。由假设，E_n 在 E_{n+1} 中是闭的，E_{n+1} 在 E_{n+2} 中是闭的，$\cdots$，E_{k-1} 在 E_k 中是闭的，推得 E_n 是 E_k 中的闭集，所以 $x\in E_n$，E_n 是 E 中的闭集。证毕。

定理 12 设 E 是 E_n 的严格归纳极限，并且对于每个 E_n 是 E_{n+1} 中的闭集，则下述结论成立：

(a) 设 A 是 E 中的子集，则 A 是有界(完全有界)的充要条件为：存在某个自然数 n_0，使得 $A\subset E_{n_0}$，并且 A 是 E_{n_0} 中的有界集(相应地，为完全有界集)。

(b) 如果 $\{x_n\}(n=1, 2, \cdots)$ 是 E 中的序列，则 x_n 在 E 中收敛于 x，即 $\lim x_n=x$ 的充要条件为：存在某个自然数 n_0，使得 $\{x_n\}$

和 x 都属于 E_{n_0}，并且在 E_{n_0} 中 $\lim x_n = x$。

(c) 如果每个 E_n 是分离的，E 中的子集 B 是紧的充要条件为存在某 n_0，使 B 是 E_{n_0} 中的紧集。

证 (a) 设 $A \subset E_{n_0}$ 是 E_{n_0} 中的有界集，则根据定理 10 知，A 是 E 中的有界集。反之，设 A 是 E 中的有界集，我们用反证法证明 A 一定包含在某个 E_n 中。假设这个结论不成立，则 A 中必可取出一列元 $\{x_n\}$ 以及自然数的增序列 $\{k_n\}$，使得

$$x_n \overline{\in} E_{k_n}, \quad 但是 \quad x_n \in E_{k_{n+1}} \quad (n=1, 2, \cdots),$$

根据引理 2，可以构造一个均衡凸集的增序列 $V_{k_n}(n=1, 2, \cdots)$，其中 V_{k_n} 是 E_{k_n} 中 0 的均衡凸环境(可以取 $V_{k_1}=E_{k_1}$)，使得对于每个自然数 n，满足下述关系

$$V_{k_{n+1}} \cap E_{k_n} = V_{k_n},$$

并且使得 $\frac{1}{n} x_n \overline{\in} V_{k_{n+1}}$。设

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{k_n},$$

则易验证 V 是 E 中 0 的均衡凸环境，但是

$$\frac{1}{n} x_n \overline{\in} V \quad (n=1, 2, \cdots),$$

这与集 A 是有界的假设相矛盾。所以必存在某 n_0，使得 $A \subset E_{n_0}$。根据定理 10，A 也是 E_{n_0} 中的有界集。

(b) 由于 E 中收敛序列是有界集，所以由本定理的结论 (a) 和定理 10 即可推得。

(c) 设 B 是 E 中的紧集。特别是，B 必是 E 中的有界集。根据 (a)，必存在某自然数 n_0，使得 $B \subset E_{n_0}$。设 $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ 是 E_{n_0} 中覆盖 B 的开集族：

$$B \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

对于每个 U_α，根据定理 10，能找到 E 中的开集 V_α，使

$$V_\alpha \cap E_{n_0} = U_\alpha \quad (\alpha \in A),$$

则 $\{V_\alpha, \alpha \in A\}$ 是 E 中 B 的开覆盖，由于 B 是 E 中的紧集，存在 B 的有限开覆盖 $\{V_{\alpha_j}, j=1, 2, \cdots, n\}$，则 $\{U_{\alpha_j}, j=1, 2, \cdots, n\}$ 就是

E_{n_0} 中 B 的有限开覆盖。所以 B 是 E_{n_0} 中的紧集。

相反地，如果 B 是 E_n 中的紧集，则根据定理 10，可以直接验证 B 在 E 中的任意开覆盖包含有限子覆盖。证毕。

定理 13 设 E 是 E_n 的严格归纳极限，并且每个 E_n 是 E_{n+1} 的真闭子空间，则 E 不能被距离化。

证 设 $\{V_n\}(n=1, 2, \cdots)$ 是 E 中 0 的均衡凸环境的减序列

$$V_1\supset V_2\supset\cdots\supset V_n\supset\cdots,$$

因为 V_n 是吸收集合，而 $E_n\neq E$，所以对于任一个 $n=1, 2, \cdots$，有 $V_n\not\subset E_n$，取 $a_n\in V_n\setminus E_n$，则由定理 12 中的 (a)，$\{a_n\}(n=1, 2, \cdots)$ 不是 E 中的有界集。但是集合 $\{a_n\}_{n\in N}$ 被每一个 V_k 吸收，这是因为当 $n\geqslant k$ 时，$a_n\in V_n\subset V_k$，而 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}\}$ 是有界集。这就表明 $\{V_n\}(n=1, 2, \cdots)$ 不可能是 E 中 0 的一组环境基，所以 E 不满足第一可列公理。证毕。

我们必须注意下述事实：完备局部凸空间的归纳拓扑（归纳极限）不一定是完备的。甚至完备局部凸空间的分离的商拓扑也不一定是完备的。但如果 E 是 E_n 的严格归纳极限，且设每个 E_n 是完备的，由定理 12 立即能推得 E 是序列完备或有界完备的。进一步可以证明下面的结论：

定理 14 完备局部凸空间 $(E_n, \mathscr{T}_n)$ 的严格归纳极限 $(E, \mathscr{T})$ 是完备的局部凸空间。

证 设 $\mathscr{F}$ 是 E 中的一个 Cauchy 滤子[*)]，$\mathscr{N}(E)$ 或 $\mathscr{N}$ 表示 E 中 0 的环境全体。则

$$\mathscr{F}+\mathscr{N}=\{F+U \mid F\in\mathscr{F}, U\in\mathscr{N}\}$$

也是 E 中的 Cauchy 滤子，而且 $\mathscr{F}+\mathscr{N}$ 在 E 中是收敛的充要条件是：$\mathscr{F}$ 在 E 中收敛。

下面首先证明存在某个自然数 n_0，使得每个 $F+U$ 和 E_{n_0} 相交，其中 $F\in\mathscr{F}$，$U\in\mathscr{N}$。我们用反证法证明。如果这个结论不成

---

*) 设 $\mathscr{F}$ 是线性拓扑空间 E 中的一个滤子，如果对于每个 $U\in\mathscr{N}$，存在 $F\in\mathscr{F}$，使得 $F-F\subset U$，则称 $\mathscr{F}$ 为 Cauchy 滤子。线性拓扑空间 E 是完备的充要条件为：E 中每个 Cauchy 滤子收敛于 E 中的一点 x。详细内容可参看关肇直著《拓扑空间概论》。

立，则对于每个 n，存在某个 $A_n \in \mathscr{F}$ 以及 $U_n \in \mathscr{N}$，使得

$$(A_n + U_n) \cap E_n = \varnothing.$$

不失一般性，我们可以假定 U_n 都是均衡凸的，且对每个 n，有

$$U_{n+1} \subset U_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

令 V 为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{U_n \cap E_n\}$ 的均衡凸包，记作

$$V = \Gamma_n(U_n \cap E_n).$$

则由定理 10 和归纳拓扑的定义可知：V 是 E 中 0 的环境。由此可得：对于每个 n，必有

$$(A_n + V) \cap E_n = \varnothing \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{20}$$

事实上，如果对某个 n_0，其交非空。取

$$x \in (A_{n_0} + V) \cap E_{n_0},$$

则必存在 $a \in A_{n_0}$ 及 $x_i \in U_i \cap E_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$，$\sum_{i=1}^{m} |t_i| \leqslant 1$，使

$$x = a + \sum_{i=1}^{m} t_i x_i.$$

因此

$$x - \sum_{i \leqslant n_0} t_i x_i = a + \sum_{i > n_0} t_i x_i.$$

由于 U_n 是均衡凸的减序列，上式右端是 $A_{n_0} + U_{n_0}$ 中的元，而左端是 E_{n_0} 中的元。这与 $A_{n_0} + U_{n_0}$ 和 E_{n_0} 不相交相矛盾。这就证明了对于每个 n，$(A_n + V) \cap E_n = \varnothing$。由于 $\mathscr{F}$ 是 Cauchy 滤子，存在 $F \in \mathscr{F}$，使得 $F - F \subset V$。任取 $w \in F$，则对于某个 k，$w \in E_k$，再取 $v \in A_k \cap F$，则

$$w = v + (w - v) \in v + (F - F) \subset A_k + V,$$

这和 $(A_k + V) \cap E_k = \varnothing$ 相矛盾。由此得知：必存在某个自然数 n_0，使得 $\mathscr{F} + \mathscr{N}$ 中的每个集都和 E_{n_0} 相交。

令 $$\mathscr{B} = \{(A + U) \cap E_{n_0} \mid A \in \mathscr{F}, U \in \mathscr{N}\},$$

那末 $\mathscr{B}$ 是 E_{n_0} 中的一个 Cauchy 滤子。由假定 E_{n_0} 是完备的，每个 Cauchy 滤子必须收敛，所以 $\mathscr{B}$ 在 E_{n_0} 中收敛于 x。下面要证明 $\mathscr{F} + \mathscr{N}$ 在 E 中也收敛于 x。这只要证明对于每个 $A + U \in \mathscr{F} + \mathscr{N}$，$x \in (A + U)^-$，其中闭包是在 E 中取的。

任取 $W \in \mathscr{N}(E)$。由于在 E_{n_0} 中，$\mathscr{B} \to x$，所以

$$x+(W\cap E_{n_0})\in\mathscr{B}.$$

由于在滤子中任何两个集的交非空，所以 $x+(W\cap E_{n_0})$ 和 $(A+U)\cap E_{n_0}$ 的交非空。因此 $(x+W)\cap(A+U)\neq\varnothing$，即知 $x\in(A+U)^-$。证毕。

通常称 Banach 空间增序列的严格归纳极限为 (LB) 空间，而称局部凸 Frechet 空间（也称 (F) 空间）增序列的严格归纳极限为 (LF) 空间。这些空间虽然不能被距离化，但是却有着 Frechet 空间的一些重要性质，例如由定理 6，(LB) 空间及 (LF) 空间是圃空间，也是桶式空间。

系 每个 (LB) 或 (LF) 空间是完备的。

下面举一个 (LF) 空间的重要例子：

例 7 K 空间。$K(a)$ 表示直线上支集在 $[-a,a]$ 中的实（或复）值无限次可微函数全体，赋以各阶导函数的一列收敛拓扑，是一个局部凸 Frechet 空间。设 K 表示直线上所有支集为紧的实（或复）值无限次可微函数全体组成的线性空间，在 K 上取关于子空间序列 $K(n)$ $(n=1,2,\cdots)$ 的局部凸归纳拓扑 $\mathscr{T}$，则 $K(\mathscr{T})$ 为子空间序列 $K(n)$ 的严格归纳极限。根据定理 14，K 空间是完备的。K 空间是广义函数论中常用的基本函数空间之一。

§7 凸集的端点和 Крейн-Мильман 定理

设 E 是一个线性空间。对于 $x、y\in E$，称

$$(x,y)=\{tx+(1-t)y\,|\,0<t<1\}$$

为连结 x 和 y 的实的开区间。又设 A 是 E 中的凸集，A 中的点 x 称为 A 的端点，是指：对于 A 中任何两点 $a、b$，均有 $x\bar{\in}(a,b)$。即 x 不是 A 中任何线段的内点。端点的概念是下述概念的特殊情况。

设 E 是一个线性空间，A 是 E 中的凸集，H 是 E 中的实线性流形，如果满足下述条件：

(a) $H\cap A\neq\varnothing$；

(b) 对于$x,y\in A$，如果$(x,y)\cap H\neq\emptyset$。则$(x,y)\subset H$。则称H为凸集A的承托流形。当H仅包含一个点时，称为零维承托流形。由定义，零维承托流形即是端点。如果$\{H_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$是$A$的一族承托流形，则$\bigcap\{H_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$或与$A$不相交，或也是$A$的承托流形。如$A$是平面上的闭三角形，三角形的三个顶点就是$A$的端点，通过边的直线是$A$的承托流形。对于平面上的闭凸多边形，端点集正是它的顶点。由于平面上的闭凸多边形上的任何一点都可以用它的顶点的凸组合表示，换句话说，对于闭凸多边形而言，任何一点都可以用它的端点的凸组合表示。这个事实可以推广到局部凸线性拓扑空间中的紧凸集的情形。

定理 1(Крейн–Мильман 定理)　设A是分离的局部凸线性拓扑空间E中的紧凸集。则A的每个非空闭承托流形必包含A的一个端点。并且A是它的所有端点集合的闭凸包。

证　设R是A的任一闭承托流形，现在考虑R中所包含的A的闭承托流形的全体$\mathscr{F}$。对于$\mathscr{F}$中的任何一个按包含关系全序的子族$\mathscr{F}_1=\{R_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$，由于$R_\alpha\cap A$是紧集，且$\{R_\alpha\cap A,\alpha\in\mathscr{A}\}$中的有限个交是非空的，所以$(\bigcap\limits_{\alpha\in\mathscr{A}}R_\alpha)\cap A=\bigcap\limits_{\alpha\in\mathscr{A}}(R_\alpha\cap A)\neq\emptyset$，由此即知，$\mathscr{F}_1$的下端即是$\mathscr{F}_1$中一切集合的交。于是由 Zorn 引理，$\mathscr{F}$有一个极小元$S$，这个集仍是$A$的闭承托流形。

下面证明S只含一点，即是A的端点。如不然，设S至少包含不同的两点x与y。则存在E上的实连续线性泛函f，使得

$$f(x)\neq f(y)。$$

因为$S\cap A$是紧集，f在其上是有界的，将其上确界记为M。令$C=S\cap f^{-1}(M)$，由于$f(x)\neq f(y)$，所以x与y不能都在C中，由此C是S的非空闭真子流形。但是C仍是A的闭承托流形（这是因为f在$S\cap A$上达到上确界M，所以

$$C\cap A=S\cap f^{-1}(M)\cap A\neq\emptyset。$$

另外，如$(a,b)\subset A$，且$(a,b)\cap C\neq\emptyset$，则$(a,b)\cap S\neq\emptyset$，故$(a,b)\subset S$，$(a,b)\subset S\cap A$。又因当$x\in(a,b)\subset S\cap A$时，$f(x)\leqslant M$，

而对于 $z\in(a,b)\cap C$，$f(z)=M$，于是只能 $f(a)=f(b)=M$，所以 $(a,b)\in f^{-1}(M)\cap S)$。这就与 S 是极小的相矛盾，所以 S 只能含一点。

设 D 是 A 中所有端点的闭凸包，显然有 $D\subset A$，如果 $A\backslash D$ 非空，取 $x_0\in A\backslash D$，根据 §3 中的定理 6 的推论 1，存在 E 上的实连续线性泛函 g，使得 $g(x_0)>\sup\limits_{x\in D}g(x)$。设

$$B=\{x\,|\,g(x)=\sup_{y\in A}g(y)\}.$$

如上，B 是 A 的承托闭流形，从而必包含 A 的一个端点。但因 $x_0\in A$，所以，$g(x_0)\leqslant\sup\limits_{y\in A}g(y)$，所以 B 和 D 不相交。这样 A 在 D 以外还有端点，这和 D 的定义相矛盾。由此必须 $A=D$。证毕。

定理 2 设 A 是分离的局部凸空间 E 中的紧集，且 A 的凸闭包 $[co(A)]^-$ 是紧的，则 $[co(A)]^-$ 的每一个端点属于 A。

证 设 U 是 E 中 0 的均衡凸闭环境。因为 A 是紧的，存在 A 中有限个点 $x_1,\cdots,x_n$，使得 $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}(x_i+U)$。令

$$A_i=A\cap(x_i+U),$$

则 $[co(A)]^-$ 是 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}[co(A_i)]^-$ 的凸包。因此对于每一个 $y\in[co(A)]^-$ 可表示为 $y=\Sigma t_iy_i$，其中

$$t_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n}t_i=1,\ y_i\in[co(A_i)]^-\subset x_i+U.$$

如果 y 是 $[co(A)]^-$ 的端点，则对于某个 i，有 $y=y_i$，所以

$$y=y_i\in x_i+U\subset A+U.$$

由于 U 是 0 的任一均衡凸闭环境，且 A 是闭集，根据第一章 §2 中所述，即知 $y\in A$。证毕。

例 1 设 E 是赋范线性空间，E' 是 E 的强对偶，令 $A=\{f\in E'\,|\,\|f\|\leqslant 1\}$，则由 Alaoglu-Bourbaki 定理，$A$ 是 $(E',\sigma(E',E))$ 中的紧凸子集，根据定理 1 即知：E' 中的单位球 A 必有端点。

例 2 设 c_0 是满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 的 $x=(x_1,x_2,\cdots)$ 全体所组成

的线性空间，赋以范数 $\|x\|=\sup_n|x_n|$，为一个 Banach 空间。考虑 c_0 上的单位球 $V=\{x|\|x\|\leqslant 1\}$，则 V 不包含任何端点。事实上，如 $x=(x_1, x_2, \cdots)\in V$，则由于 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$，取某个 n_0，使 $|x_{n_0}|<1$，取 ε 适当小，则把 x 中的 x_{n_0} 换成 $x_{n_0}+\varepsilon$ 及 $x_{n_0}-\varepsilon$ 后的点 y 与 z 仍属于 V，但是 $x\in(y, z)$，说明 V 中任意一点都不是端点。根据例 1，c_0 空间不能是任一赋范线性空间的共轭空间。

例 8　$C[0, 1]$是$[0, 1]$上的实或复值连续函数全体，赋以范数 $\|x(t)\|=\max|x(t)|$ 后所成的 Banach 空间。其闭单位球 V 的端点全体是集合$\{x||x(t)|\equiv 1\}$。

最后应该指出：由于端点的定义，总可假定 E 是实的。Крейн-Мильман 定理和以后发展起来的端点的积分表现理论，是局部凸线性拓扑空间理论中的重要定理之一。

习　题　二

1．试证明局部凸线性拓扑空间 E 的完备化空间 $\tilde{E}$ 也是局部凸的。

2．设 $S=\{n^{-1/2}e_n\}\subset l^{1/2}$，试证明 S 是完全有界集，但 S 的凸包甚至不是有界集。

3．举例说明，对非局部凸线性拓扑空间，有限维子空间可以没有拓扑补子空间。

4．证明局部凸空间的商空间是局部凸的。

5．证明最强局部凸拓扑是分离的。

6．设在线性空间 E 上赋以最强局部凸拓扑。试证明 E 上的所有拟范数是连续的，从 E 到局部凸空间的每个线性映照是连续的，特别有 $E'=E^*$，从而每个有界集是有限维空间。

7．试证明无限维线性空间 E 上赋以最强局部凸拓扑 $\mathscr{T}$ 不能被距离化（根据上题及第一章习题 31）。

8．试证明无限维线性空间 E 上赋以最强局部凸拓扑是第一纲的（因为 E 中每个真子空间是包含它的极大子空间的交，由第 6 题知，每个极大子空间是闭的，所以 E 中每个子空间是闭的。用 Hamel 基把 E 表为 $\cup E_n$，使每个 E_n 是 E 的真子空间）。

9．设 E 是不可列维线性空间，试证明 E 上最强向量拓扑不是局部凸的（如第一章习题 34 中，集$\{x|p(x)<1\}$不能包含凸吸收集）。

10. 设E是局部凸空间，$\{x_n\}$是E中收敛于0的序列，试证明

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\to 0.$$

11. 设$\{T_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$是线性空间$E$上的一族局部凸向量拓扑，试证明$\bigvee\{T_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$也是局部凸向量拓扑。

12. 在c_0空间中，令$p(x)=\sup\limits_i|x_i|$，$p_n(x)=|x_n|$，问由拟范数族$\{p_n, n\in N\}$决定的拓扑和由$p(x)$决定的拓扑是否一致？

13*. 对$y\in l^\infty$，令$p_y(x)=|\sum y_n x_n|+\|x\|_\infty$，试证明空间$l_1$上由拟范数族$\{p_y|y\in l^\infty\}$决定的拓扑$T$严格界于$l_1$上弱拓扑和范数拓扑之间。

14. 试证明c_0空间不是弱序列完备的(c_0在$(l^\infty, \sigma(l^\infty, l_1))$中是序列稠密的)。

15. 试证明赋范空间中的范数是弱拓扑下半连续的。

16. 设E是可分的赋范空间，试证明E'中的单位球$V^0=\{f|\|f\|\leqslant 1\}$是弱*拓扑紧的距离空间。

17. 设$(E, \mathscr{P})$是局部凸空间，拓扑由拟范数族$\mathscr{P}$给定、试证明$(E, \mathscr{P})$上拓扑可由一个拟范数给定的充要条件为：$\mathscr{P}$中存在由有限个连续拟范数组成的子基；$(E, \mathscr{P})$可距离化的充要条件为：$\mathscr{P}$中存在可数子基。

18. 试证明在线性拓扑空间E上，存在非零连续线性泛函的充要条件为：E包含一个不为全空间的凸体。

19. 试证明$L^p[0, 1]$($0<p<1$)中单位球的凸包是整个$L^p[0, 1]$(利用Hahn-Banach定理)。

20. 线性拓扑空间E的基是指E中的一列元$\{e_n\}$，使得对每个$x\in E$有唯一的表示$x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n e_n$。如果$\{e_n\}$是一组基，当$x=\sum a_n e_n$时，线性泛函$f_n(x)=a_n$称为坐标泛函。如果$f_n\in E'$，$n\in N$，我们称$\{e_n\}$为Schauder基。试证明Frechet空间$E$中如存在基，则必是Schauder基。

21. 试证明每个分离的有限维线性拓扑空间有Schauder基。

22. 试证明空间$\mathscr{C}[0, 1]^*$和$L^p[0, 1]$($0<p<1$)是可分的Frechet空间，但不存在基(根据第20题以及其上不存在非零连续线性泛函)。

23. 设E是实或复的线性拓扑空间，如E上有基，试证明E的势$\leqslant\aleph$。因而势大于$\aleph$的线性拓扑空间不存在基。

24.* 设E是线性拓扑空间，A是E中非空凸开集，S是E中的线性流形，且$S\cap A=\varnothing$，则必存在一个闭超平面H，使$S\subset H$，并且$H\cap A=\varnothing$(S.Mazur定理)。

25. 设E是线性拓扑空间，A是E中的凸开集，F是E的子空间，

$F\cap A=\varnothing$，求证存在E上的连续线性泛函f，使得当$x\in F$时，$f(x)=0$，以及当$x\in A$时，$f(x)>0$。

26. 设E是线性拓扑空间，如果$E'=\{0\}$，试证明E中仅有一个非空凸开集，从而E中每个开集的凸包是整个空间E。

27.* 第一章习题34中的H是不可数的，试证明$\{x\mid p(x)<1\}$不能包含凸吸收集，所以E上不存在局部凸向量拓扑，使得比由$p(x)$导出的拓扑要强。

28. 设Φ是线性空间E上的局部凸向量拓扑集合，试证明$f\in(E,\bigvee\Phi)'$的充要条件为：存在$T_1,\cdots,T_n\in\Phi$，$g_1,\cdots g_n\in E^*$，且$g_i\in(E,T_i)'$ $(i=1,2,\cdots,n)$，使$f=\sum_{i=1}^{n}g_i$。

29. 设E是线性拓扑空间，F是E的一个子空间。记$F^{\perp}=\{f\in E'\mid f(x)=0, x\in F\}$，典型映照$\theta: E\to E/F$。对于$E/F$上每个连续线性泛函$g$可以对应$E$上连续线性泛函$f=g\cdot\theta$。很明显，在这个对应下，$(E/F)'$和$F^{\perp}$代数同构。此外，对于$f\in E'$，把它限制在$F$上可以看作$F'$中元$f_1$，这就定义了一个$E'$到$F'$的线性映照$T: f\to f_1$。空间$F^{\perp}$是线性映照$T$的零空间，由$T$可以导出一个$E'/F^{\perp}$到$F'$中的一一线性映照$\widetilde{T}$: $E'/F^{\perp}\to F'$，一般说来，$\widetilde{T}$的像可以不是满的。试证明当E是局部凸空间时，$\widetilde{T}$的像是满的，$E'/F^{\perp}$典型同构于F'。

30. 设A是局部凸空间E的凸闭子集，B是E的子集，试证明$B\subset A$的充要条件为：对于每个$f\in E'$，满足$f(B)\subset f(A)$。

31. 设E是无限维线性空间，E^*是E上线性泛函全体，$F\subset E^*$，试证明$(E,\sigma(E,F))$不能是一个赋范空间，但是有可能被距离化。

31. 设$(E,\mathscr{T})$是分离的有限维线性拓扑空间，试证明$\mathscr{T}=\sigma(E,E')$。

32. 设E是无限维赋范空间，试证明E上的弱拓扑严格弱于范数拓扑。

33. 设E是线性空间，F是E^*的子空间，则F上的$\sigma(F,E)$拓扑是K^E上的乘积拓扑在F上的限制。

34. 设E是Banach空间，试证明E'在$(X^*,\sigma(X^*,X))$中是稠密的，且是序列闭的。

35. 设E是无限维赋范空间，$A=\{x\mid \|x\|>1\}$，试证明A按范数拓扑是闭的，但是按弱拓扑是稠密的。

36.* 设E是局部凸Frechet空间，H是E的闭子空间，$\theta: E\to E/H$为典型映照，试证明E/H中每个紧子集是E中紧子集在典型映照下的像。

37.* 设$\{E_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$是一族局部凸空间，可以如下定义乘积空间$\Pi E_\alpha$

和直接和 $\oplus E'_\alpha$ 之间的自然对偶关系：对于 $x=(x_\alpha)\in\Pi E_\alpha$, $f=\oplus f_\alpha\in\oplus E'_\alpha$，定义双线性泛函

$$\langle x, f\rangle=\sum_{\alpha\in\mathscr{A}}\langle x_\alpha, f_\alpha\rangle,$$

试证明 $(\prod_{\alpha\in\mathscr{A}} E_\alpha)'$ 作为线性空间同构于 $\oplus E'_\alpha$。此外，还可类似地证明 $(\oplus E_\alpha)'$ 作为线性空间同构于 $\Pi E'_\alpha$。

38. 设 E 是局部凸空间，U 是 0 的一个环境，则 U^0 是它的端点的 $\sigma(X', X)$ 闭凸包，特别是，U^0 中必存在端点。

39. 试证明在赋范空间的共轭空间中，单位球 $\{f\mid\|f\|\leqslant 1\}$ 必有端点。

40. 试证明空间 c_0 中单位球不存在端点。

41. 设 f 是局部凸空间 E 上的连续线性泛函。C 是 E 中的凸紧子集，试证明 f 在 C 上的极大值必可在端点上取到。

42. 试证明赋范空间 $L^1(0, 1)$ 的单位球上不存在端点，因而 $L^1(0, 1)$ 不是任何赋范空间的共轭空间。

43. 试证明 f 是赋范空间 $L^\infty(0, 1)$ 的单位球上的端点的充要条件为：$f^2=1$。

第三章　对　偶　性

本章讨论对偶空间及其相应的问题．是局部凸线性拓扑空间理论的中心内容．在研究局部凸空间时可以看到X和X'有一些相对称的结果，例如X关于弱拓扑$\sigma(X, X')$的一些结果，X'上关于弱*拓扑$\sigma(X', X)$必有相应的结果成立．这就启发我们在研究局部凸空间及其共轭空间时，把原来的空间X和共轭空间X'放在相对称的地位是方便的．虽然在对偶空间的叙述中采用较为一般的形式，我们仍然可以看到共轭空间在对偶空间理论中是必不可少的．所以对偶性理论的结论一般来说是为了研究局部凸空间的．

§1　线性空间的对偶和相容拓扑

定义　线性空间的对偶$\langle X, Y\rangle$是指有两个线性空间X和Y以及由$X\times Y$到复数域C的双线性泛函，记作$\langle x, y\rangle$，且满足下述分离公理：

(1) 如果对每个$y\in Y$，$\langle x, y\rangle=0$，则$x=0$；

(2) 如果对每个$x\in X$，$\langle x, y\rangle=0$，则$y=0$．

并称X和Y为对偶的线性空间．以后简称$\langle X, Y\rangle$为对偶空间（严格地讲，应称为对偶空间对）．

如果X是分离的局部凸空间，X'是其共轭空间，对于$x\in X$，$f\in X'$，按照$\langle x, f\rangle=f(x)$定义双线性泛函，则$\langle X, X'\rangle$构成对偶空间，也称为局部凸空间X的自然对偶．在对偶理论中，如不指明，总假定局部凸空间满足T_0分离公理．

设X是线性空间，X上的线性泛函全体记为X^*，如果$Y\subset X^*$是X^*的线性子空间，并且在X上是全的（即如果$x\in X$，$x\neq0$，则

必存在 $y\in Y$，使 $y(x)\neq 0$)。对于 $x\in X$，$y\in Y$ 定义双线性泛函

$$\langle x, y\rangle = y(x), \tag{1}$$

则 $\langle X, Y\rangle$ 构成对偶。实际上，任何对偶线性空间 $\langle X, Y\rangle$ 总可以表达为如上的形式。因为对 $y\in Y$，令 $\hat{y}=\langle x, y\rangle$，则 $\hat{y}$ 是 X 上的线性泛函，$\hat{y}\in X^*$，所以总可以把 Y 嵌入 X^*，而看作为它的线性子空间。

设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，在 X 上用拟范数族

$$\{|\langle x, y\rangle|, y\in Y\} \tag{2}$$

定义一个局部凸向量拓扑，称为 X 上关于对偶 $\langle X, Y\rangle$ 的弱拓扑，记为 $\sigma(X, Y)$；与此对称地，在 Y 上由拟范数族 $\{|\langle x, y\rangle|, x\in X\}$ 导出的局部凸拓扑称为 Y 上关于对偶 $\langle X, Y\rangle$ 的弱拓扑，记为 $\sigma(Y, X)$。

设 X 是局部凸空间，$\langle X, X'\rangle$ 为自然对偶，则 X 上的弱拓扑即是关于对偶 $\langle X, X'\rangle$ 的弱拓扑 $\sigma(X, X')$。而 X' 上的弱*拓扑即是关于对偶 $\langle X', X\rangle$ 的弱拓扑 $\sigma(X', X)$。

与第二章 §4 中的相类似，令 $P=\Pi\{C, y\in Y\}$，其中 C 表示数直线赋以通常拓扑。作 X 到 P 中的线性映照 T

$$T: x\longmapsto \{\langle x, y\rangle, y\in Y\}, \tag{3}$$

根据对偶空间的分离公理，T 是一一映照。容易知道 $(X, \sigma(X, Y))$ 经映照 T 和 P 的线性子空间拓扑同胚，所以 $(X, \sigma(X, Y))$ 可以看作 P 的子空间 $T(X)$。由于完备空间的乘积空间是完备的，所以 P 是完备的分离的局部凸空间。X 中的集合 U 是 $\sigma(X, Y)$ 拓扑开的充要条件为存在 P 中的开集 V，使得 $U=T^{-1}(V)$。与此等价地，X 中的集合 A 是 $\sigma(X, Y)$ 闭的充要条件为存在 P 中的闭集 B，使得 $A=T^{-1}(B)$。同样需指出的是：如果 X 中的子集 A 是 $\sigma(X, Y)$ 闭集，并不能断言 $T(A)$ 是 P 中的闭集，但可以知道 $T(A)$ 是 $T(X)$ 中的闭集，其中 $T(X)$ 赋以 P 的相对拓扑。

与第二章 §4 一样，可以知道 $(X, \sigma(X, Y))$ 中有界集与完全有界集是一致的。

X 上的弱拓扑 $\sigma(X, Y)$ 一般不能被距离化，例如设 X 是不可列无限维的 Hilbert 空间，取自然对偶，很容易证明 X 上的 $\sigma(X, X')$

拓扑是不能被距离化的。关于弱拓扑，有一个可距离化的结果是很有用的。如果B是$(X, \sigma(X, Y))$的紧子集，A是Y中的子集并且分离B中的点，即如果x_1、$x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，必存在$f\in A$，使$\langle x_1, f\rangle\neq\langle x_2, f\rangle$。记$B$上关于$A$的点点收敛拓扑为$\mathscr{T}$，即$B$中定向列$x_\nu$按$\mathscr{T}$收敛于$x\in B$的充要条件为：对于每个$y\in A$，$\langle x_\nu, y\rangle\to\langle x, y\rangle$。则$\sigma(X, Y)|_B\supset\mathscr{T}$，由于$A$分离$B$中的点，所以$\mathscr{T}$拓扑满足$T_2$分离公理。另外，由假定$B$是$\sigma(X, Y)$紧的，$B$按$\sigma(X, Y)$是紧的拓扑空间。所以由一般拓扑空间的基本性质可知道，B上的拓扑$\mathscr{T}$和$\sigma(X, Y)|_B$是一样的。如果A是可数的，则$\mathscr{T}$满足第一可列公理，所以集B上的弱拓扑$\sigma(X, Y)$是可距离化的。

定理 1 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，B是X中的$\sigma(X, Y)$紧子集，Y中子集A分离B中的点，则B上$\sigma(X, Y)$拓扑以及B上关于A的点点收敛拓扑(可记作$\sigma(X, A)|_B$)是一致的。进一步，如果A是可数的，则B按$\sigma(X, Y)$可距离化。

推论 设X是可分的局部凸距离空间，则X'是$\sigma(X', X)$拓扑序列可分的。

证 设$\{U_n\}$是X中0的均衡凸环境基，则

$$X'=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n^0,$$

其中$U_n^0=\{f\in X' \mid 对于x\in U_n, |f(x)|\leqslant 1\}$。由 Alaoglu–Bourbaki 定理，$U_n^0(n=1, 2, \cdots)$是$\sigma(X', X)$拓扑紧的。由于$X$是可分的，存在可列集$A=\{x_n; n=1, 2, \cdots\}$在$X$中是稠密的，很明显，$A$分离$X'$中的点，当然也分离$U_n^0$中的点。再根据定理1可知道，$U_n^0(n=1, 2, \cdots)$关于$\sigma(X', X)$是可距离化的。所以，$U_n^0$关于$\sigma(X', X)$是紧的距离空间，必定是序列可分的。由此$X'$也是序列可分的。证毕。

设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，对于$y\in Y$，则$\hat{y}(x)=\langle x, y\rangle$是$X$上的线性泛函。则称线性泛函$\hat{y}(x)$可以用$y\in Y$表示。$\hat{Y}$指集合$\{\hat{y}, y\in Y\}$。由于$y$和$\hat{y}$间的对应是一一的，为方便起见，常把$\hat{y}$看作$y$而不加区别。

定义 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，如果X上的局部凸向量拓扑T使得$(X, T)' = \hat{Y}$，则称T为X上的相容拓扑。

设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，在X上取弱拓扑$\sigma(X, Y)$，则由弱拓扑的定义可知道：每一个$y\in Y$看作X上的线性泛函是连续的。下面的定理说明了$(X, \sigma(X, Y))$上的每一个连续线性泛函都可以用某个$y\in Y$表示，也就是说，Y是$(X, \sigma(X, Y))$上的连续线性泛函全体，从而X上的弱拓扑$\sigma(X, Y)$是相容拓扑。

定理 2（弱连续线性泛函的表示定理） 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，则X上的线性泛函$f(x)$关于弱拓扑$\sigma(X, Y)$连续的充要条件为对某一个$y\in Y$，$f(x) = \langle x, y\rangle$，即

$$(X, \sigma(X, Y))' = Y,$$

$\sigma(X, Y)$是X上最弱的相容拓扑。

下面先证明一个引理：

引理 1 设X是线性空间，X上的线性泛函$f_0(x)$可以表示为线性泛函$f_1, \cdots, f_n$的线性组合的充要条件为

$$N(f_0)\supset\bigcap_{i=1}^{n} N(f_i). \tag{4}$$

证 必要性：如果f_0能够表示为$f_i(i = 1, 2, \cdots, n)$的线性组合：$f_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i$，则当$x\in\bigcap\limits_{i=1}^{n} N(f_i)$时，必有$f_i(x) = 0$ $(i = 1, \cdots, n)$，所以$f_0(x) = 0$，由此$N(f_0)\supset\bigcap\limits_{i=1}^{n} N(f_i)$。

充分性：我们对n用归纳法证明之：不妨设$f_i\neq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，当$n = 1$时，如果$N(f_0)\supset N(f_1)$，由于f_1是线性泛函，$N(f_0)$是co-1维超平面，取$x_0\in X$，使$f_1(x_0)\neq 0$。因为对每个$x\in X$，有

$$f_1\left(x - \frac{f_1(x)}{f_1(x_0)}x_0\right) = 0,$$

则
$$x - \frac{f_1(x)}{f_1(x_0)}x_0\in N(f_1)\subset N(f_0),$$

所以
$$f_0(x) = \frac{f_0(x_0)}{f_1(x_0)}f_1(x).$$

设命题对$n = k$时成立，当$n = k + 1$时，我们考虑线性空间$N(f_{k+1})$；

如果 $N(f_0)\supset\bigcap_{i=1}^{k+1}N(f_i)$满足，则当 $x\in N(f_{k+1})$ 并且 $x\in\bigcap_{i=1}^{k}N(f_i)$ 时，$x\in N(f_0)$。由归纳法假定，在线性子空间 $N(f_{k+1})$中，

$$f_0(x)=a_1f_1(x)+\cdots+a_kf_k(x),\ x\in N(f_{k+1})。$$

又因为 $f_0-\sum_{i=1}^{k}a_if_i$ 在 $N(f_{k+1})$上为 0，由 $n=1$ 情形的讨论可知道

$$\left(f_0-\sum_{i=1}^{k}a_if_i\right)(x)=a_{k+1}f_{k+1}(x),$$

即 $f_0=\sum_{i=1}^{k+1}a_if_i$。证毕。

定理 2 的证明：因为 X上的弱拓扑 $\sigma(X,Y)$ 是由拟范数族 $\{|\langle x,y\rangle|,\ y\in Y\}$决定的。设 $f\in(X,\sigma(X,Y))'$，则存在有限个 $y_1,\cdots,y_n\in Y$ 及正数 $c_1,\cdots,c_n$，使得

$$|f(x)|\leqslant c_1|\langle x,y_1\rangle|+\cdots+c_n|\langle x,y_n\rangle|,\ x\in X. \tag{5}$$

令 $f_i(x)=\langle x,y_i\rangle(i=1,2,\cdots,n)$，则当 $x\in\bigcap_{i=1}^{n}N(f_i)$ 时，由(5)式推得 $f(x)=0$，由引理 1 即知

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\langle x,y_i\rangle=\left\langle x,\ \sum_{i=1}^{n}a_iy_i\right\rangle.$$

所以 $f\in Y$，由此 $(X,\sigma(X,Y))'\subset Y$，又由 $Y\subset(X,\sigma(X,Y))'$ 即得$(X,\sigma(X,Y))'=Y$。$\sigma(X,Y)$是 X上的相容拓扑。由于对于 X上的任何相容拓扑，对每个 $y\in Y$，$\langle x,y\rangle$必须是 X上的连续线性泛函。由弱拓扑的定义即知$\sigma(X,Y)$ 是 X上最弱的相容拓扑。证毕。

由定理 2 知道，对偶的线性空间上必存在最弱的相容拓扑，但是否存在最强的相容拓扑？回答是肯定的。下面将给出存在性的证明。在 §5 里将给出具体构造。

设 X 是线性空间，Φ 是 X 上的一族向量拓扑，则 X 上存在唯一的向量拓扑，称为 $\bigvee\Phi$(或 $\sup\Phi$)，使得 X 中任一定向点列 x_ν 按拓扑 $\bigvee\Phi$ 收敛于 a，即 $x_\nu\xrightarrow{\bigvee\Phi}a$ 的充要条件是对于每一个 $T\in\Phi$，

$$x_\nu\xrightarrow{T}a.$$

首先证明几个引理：

引理 2 设 $p(x)$，$q(x)$ 是线性空间 X 上的拟范数，如果 f 是 X 上的线性泛函，即 $f\in X^*$，满足

$$|f(x)|\leqslant p(x)+q(x),\ x\in X.$$

则必存在 $g(x)$、$h(x)\in X^*$，使得 $f(x)=g(x)+h(x)$，$x\in X$，并且

$$|g(x)|\leqslant p(x),\ |h(x)|\leqslant q(x),\ x\in X.$$

证 令 $Z=X\times X$ 是 X 和 X 的乘积线性空间，作

$$r(x,\ y)=p(x)+q(y),\ (x,\ y)\in Z.$$

则 $r(x,\ y)$ 是 Z 上的拟范数，在 $Z_1=\{(x,\ x),\ x\in X\}$ 上定义线性泛函 $u(x,\ x)=f(x)$，则由假设，在 Z 的子空间 Z_1 上，有

$$|u(x,\ x)|\leqslant r(x,\ x),\ (x,\ x)\in Z_1.$$

按 Hahn-Banach 定理，把 u 延拓为 Z 上的线性泛函，仍记为 u，使

$$|u(x,\ y)|\leqslant r(x,\ y),\ (x,\ y)\in Z.$$

由线性 $f(x)=u(x,\ x)=u(x,\ 0)+u(0,\ x)$，$|u(x,\ 0)|\leqslant r(x,\ 0)=p(x)$ 及 $|u(0,\ x)|\leqslant r(0,\ x)=q(x)$。所以，如果令 $g(x)=u(x,\ 0)$，$h(x)=u(0,\ x)$，即满足引理的要求。证毕。

引理 3 设 Φ 是线性空间 X 上的一族局部凸向量拓扑，则 $f\in(X,\ \bigvee\Phi)'$ 的充要条件为存在 $T_1,\ \cdots,\ T_n\in\Phi$，$g_1,\ \cdots,\ g_n\in X^*$，其中 $g_i\in(X,\ T_i)'(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 使得

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} g_i(x),\ x\in X.$$

证明 充分性由于 $T_i\subset\bigvee\Phi(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 即得。

必要性：设 X 上的局部凸向量拓扑 $T\in\Phi$ 由拟范数族 $\mathscr{P}_T$ 给定，则 $\bigvee\Phi=\bigvee\{\mathscr{P}_T,\ T\in\Phi\}$ 由拟范数族 $\mathscr{P}=\bigcup_{T\in\Phi}\mathscr{P}_T$ 给出。如果 $f\in(X,\bigvee\Phi)'$，则由第二章 §1 可知道：必存在 $p_1,\ \cdots,p_n\in\mathscr{P}$ 和常数 M，使得

$$|f(x)|\leqslant M\sum_{i=1}^{n} p_i(x),\ x\in X.$$

则结论由引理 2 推得。

定理 3　设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，令 $\tau(X, Y)=\bigvee\{T', T'$ 是 X 上的相容拓扑$\}$，则 $\tau(X, Y)$ 是 X 上的最强相容拓扑。

证　设 $f\in(X, \tau(X, Y))'$，则由引理 3，存在相容拓扑 T_1，T_2，…，T_n，使得 $f_i\in(X, T_i)'$ 并且 $f=\sum_{i=1}^{n} f_i$。由于 T_i 是 X 上的相容拓扑，$(X, T_i)'=Y$，所以对某 $y_i\in Y$，$f_i(x)=\langle x, y_i\rangle$，所以

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)=\sum_{i=1}^{n}\langle x, y_i\rangle=\left\langle x, \sum_{i=1}^{n} y_i\right\rangle.$$

从而 $f=\sum_{i=1}^{n} y_i\in Y$，即 $\tau(X, Y)$ 是相容拓扑，而由 $\tau(X, Y)$ 的定义知道：它是 X 上的相容拓扑中最强的。证毕。

通常称 $\tau(X, Y)$ 为 X 上(关于对偶 $\langle X, Y\rangle$)的 Mackey 拓扑(或称为 X 上关于对偶 $\langle X, Y\rangle$ 的相对强拓扑)。

我们已经讨论了 X 上的相容拓扑，对称地，只要交换 X 和 Y 的位置，同样可以讨论 Y 上的相容拓扑。

当 X 是赋范空间的情形，考虑自然对偶 $\langle X, X'\rangle$，则 X 上的范数拓扑和弱拓扑 $\sigma(X, X')$ 都是关于对偶的相容拓扑。如果 X 不是自反的 Banach 空间，由于 $X''\neq X$，所以 X' 上的范数拓扑 $\beta(X', X)$ 关于对偶 $\langle X, X'\rangle$ 不是相容拓扑。

对偶不变性

设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，对于 X 上的任意两个相容拓扑 T_1 和 T_2，$(X, T_1)'=(X, T_2)'=Y$，如果某命题对某个相容拓扑 T_1 成立，则必对任何其它相容拓扑 T_2 也成立。也就是说，命题仅仅和对偶有关，而和 X 上相容拓扑的选取无关，则称这个命题是对偶不变的。下面的两个具有对偶不变性的命题可以由 Hahn-Banach 定理和第二章 §4 中的 Mackey 定理推得。

定理 4　设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，则对于 X 上的任一相容拓扑 T，(X, T) 中的有界集是一样的，即集的有界性是对偶不变的。

特别是，如果线性空间 X 上有两个局部凸向量拓扑 T_1 和 T_2，$(X, T_1)'=(X, T_2)'$，则 X 中关于 T_1 和 T_2 的有界集是一致

的。

证 因为T是相容拓扑，所以$(X, T)'=Y$，则由 Mackey 定理，X中关于T拓扑有界集和$\sigma(X, Y)$有界集是一致的。证毕。

泛函分析中的熟知命题："赋范空间中的弱有界集是范数有界的"，可以作为定理 4 的特例，但是它和命题："设X是 Banach 空间，则X'中的$\sigma(X', X)$拓扑有界集必是范数有界的"，是有区别的。实际上，如考虑自然对偶$\langle X, X'\rangle$，当X不是自反空间时，X'上的范数拓扑并不是相容拓扑。在第二个命题中，当要求X是 Banach 空间时，可以由$\sigma(X', X)$有界性推得非相容拓扑——X'中的范数拓扑的有界性。

这里还要指出，定理 4 的逆命题是不成立的。关于对偶空间$\langle X, Y\rangle$，X上的非相容拓扑和X上的相容拓扑可以有相同的有界集。上面已经指出了这样的例子。

定理 5 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，A是X中任一子集，则A关于X上的任一相容拓扑的凸闭包是相同的。所以，X中关于任一相容拓扑有相同的闭凸集，有相同的闭线性子空间。

证 设T是X上的任一相容拓扑，则$(X, T)'=Y$。令C是集A关于拓扑T的闭凸包，由 Hahn-Banach 定理的推论可知道，C必定关于拓扑$\sigma(X, X')=\sigma(X, Y)$是闭的，即$A$的弱闭凸包和关于拓扑$T$的闭凸包是一致的。但是$\sigma(X, Y)$仅和对偶$\langle X, Y\rangle$有关，从而$A$关于X上任一相容拓扑的闭凸包是相同的。其余的结论也一样可证明。证毕。

在局部凸空间(X, T)中，我们称每一个闭均衡吸收凸集为桶。所以由定理 5 可以知道，如果$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，则X关于任一相容拓扑有相同的桶。

§2 极 (polars)

在泛函分析中我们已经知道，如果X是赋范空间，则X中的弱拓扑$\sigma(X, X')$可以如下描述：令$\mathscr{F}$是X'中所有由有限个元组成

的集合，对 $F\in\mathscr{F}$，令

$$F^0=\{x\in X \mid |f(x)|\leqslant 1, \text{对每一个 } f\in F\},$$

则 $\{F^0 \mid F\in\mathscr{F}\}$ 是 X 中弱拓扑 $\sigma(X, X')$ 在 0 点的局部基。F^0 称为 F 的极。在对偶空间 $\langle X, Y\rangle$ 中可以定义相类似的概念。由于对极集可以进行运算，这给对偶空间理论的研究带来很大的方便。极的运算是线性拓扑空间理论中十分有用的工具之一。

定义 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，A 是 X 的子集，则称

$$A^0=\{y\in Y \mid |\langle x, y\rangle|\leqslant 1, \text{对每个 } x\in A\} \tag{1}$$

为 A 的极，记作 A^0。同样，对于 Y 的子集 B 可以如下定义极：

$$B^0=\{x\in X \mid |\langle x, y\rangle|\leqslant 1, \text{对每个 } y\in B\}. \tag{2}$$

有时为了明确起见，把 A^0 记作 $[A]^0_Y$，其中右下角的 Y 表示 A^0 所在的线性空间。例如设 X 是线性赋范空间，X' 和 X'' 分别表示 X 的一次共轭空间和二次共轭空间。则存在两个自然对偶 $\langle X, X'\rangle$ 和 $\langle X', X''\rangle$。如果 $B\subset X'$，则 B 关于对偶 $\langle X, X'\rangle$ 的极，记作 $[B]^0_X=\{x\in X \mid |\langle x, f\rangle|\leqslant 1, \text{对每个 } f\in B\}$，而 B 关于对偶 $\langle X', X''\rangle$ 的极，记作 $[B]^0_{X''}=\{\varphi\in X'' \mid |\langle f, \varphi\rangle|\leqslant 1, \text{对每个 } f\in B\}$。

有些书上用 $\langle x, y\rangle$ 的实部来定义极，为区别起见，可记作 A^r：

$$A^r=\{y\in Y \mid Re\langle x, y\rangle\leqslant 1, \text{对 } x\in A\}. \tag{3}$$

容易知道，如果 A 是均衡集，即当 $|\lambda|\leqslant 1$ 时，$\lambda A\subset A$，则 $A^0=A^r$。对于 A^r 有基本相似的理论。下面仅对 A^0 进行讨论。了解了 A^0 运算的性质以后，读者如果在文献中遇到 A^r 时也不会感到有什么困难了。

例 1 设 X 是赋范空间，$\|\cdot\|$ 是其上范数。X' 是 X 的共轭空间，考虑自然对偶 $\langle X, X'\rangle$。如果 $A=\{x\in X \mid \|x\|\leqslant 1\}$，则

$$A^0=\{y\in X' \mid |\langle x, y\rangle|\leqslant 1, \text{对 } x\in A\}=\{y\in X' \mid \|y\|\leqslant 1\}.$$

所以 A^0 即是 X' 中的单位球。

例 2 设 F 是 X' 的线性子空间，则关于对偶 $\langle X, X'\rangle$，有

$$F^0=\{x\in X \mid \langle x, f\rangle=0 \text{ 对 } f\in F\}.$$

事实上，如果 $x\in F^0$，则对每个 $y\in F$，$|\langle x, y\rangle|\leqslant 1$，因 F 是线性空间，对任一实数 λ，$\lambda y\in F$，故也有 $|\langle x, \lambda y\rangle|\leqslant 1$，$|\lambda|\cdot|\langle x, y\rangle|\leqslant 1$。

因为 λ 是任意实数，所以 $\langle x, y\rangle = 0$，也即 F^0 是 F 的公共零空间。

对于极运算有一些简单的性质：

(I) $A^0 = \bigcap_{x\in A}\{f \mid |\langle x, f\rangle| \leqslant 1\} = \bigcap_{x\in A} x^0$，

其中 $x^0 = \{x\}^0$ 指单点集 $\{x\}$ 的极。

由于 $\{x\}^0$ 是均衡凸集，所以 A^0 是均衡凸集。设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$A\subset X$，在 Y 上任取一个相容拓扑 T，则对每个 $x\in X$，$\hat{x}(y) = \langle x, y\rangle$ 是 Y 上的连续函数，所以 $\{x\}^0 = \{y \mid |\langle x, y\rangle| \leqslant 1\}$ 是 Y 中的闭集。所以 A^0 对于 Y 上的任一相容拓扑是闭集。特别是，X 中任一集 A 的极 A^0 是均衡凸弱闭集。

(II) 如果 $A\supset B$，则 $A^0\subset B^0$，特别是，如果 $y\in A$，则 $A^0\subset \{y\}^0$。粗略地说，较小的集对应较大的极，这可以由定义直接知道。但是要注意的是：如果 $A^0 = B^0$，一般不能推得 $A = B$ 的结论。我们不难根据下述性质(VII)来构造这样的例子。

(III) 设 a 是不等于 0 的数，那末，$(aA)^0 = \dfrac{1}{|a|} A^0$。

(IV) $A\subset A^{00}$，其中 $A^{00} = (A^0)^0 = [[A]^0_Y]^0_X$。并且有 $A^{000} = A^0$。

证 $A\subset A^{00}$ 可由定义直接知道。由(II)，推得 $A^0\supset (A^{00})^0 = A^{000}$。另外由 $A^0\subset (A^0)^{00} = A^{000}$，得到 $A^{000} = A^0$。

(V) 设 $A = \bigcup\{A_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$，则 $A^0 = \bigcap\{A^0_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$。

下面的性质和相容拓扑有关。

(VI) 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，T 是 X 上的相容拓扑，则 Y 中的子集 B 关于 (X, T) 是等度连续的充要条件为 $[B]^0_X$ 是 (X, T) 中 0 的环境。

证 设 Y 中的子集 B 关于 X 中相容拓扑 T 等度连续。则必存在 (X, T) 中 0 的环境 V，使得

$$x\in V,\ f\in B \Rightarrow |\langle x, f\rangle| \leqslant 1.$$

从而 $V\subset \{x\in X \mid |\langle x, f\rangle| \leqslant 1, \text{对 } f\in B\} = [B]^0_X$。

反之，如果 B^0 是 (X, T) 中 0 的环境，因为当 $f\in B$ 及 $x\in B^0$ 时

$|\langle x, f\rangle|\leqslant 1$，所以 B 在 0 点等度连续，从而等度连续。

(VII) 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，A 是 X 中的子集，T 是 X 上的任一相容拓扑，记 A 的均衡凸闭包为 C，则 $A^0=C^0$。

证　因为 $C\supset A$，由(II) $C^0\subset A^0$，所以只要证明 $A^0\subset C^0$ 即可。设 $y\in A^0$，则由(IV)和(II)知道 $A\subset A^{00}\subset\{y\}^0$。由于 $\{y\}^0$ 是 X 中的均衡凸闭集，所以 $C\subset\{y\}^0$，由此 $y\in y^{00}\subset C^0$，即得 $A^0\subset C^0$。证毕。

对于对偶空间 $\langle X, Y\rangle$，$A\subset X$，容易知道 $A=\{0\}$ 的充要条件是 $A^0=Y$。但是 $A=X$ 和 $A^0=\{0\}$ 是不等价的。事实上，根据(VII)，如取 A 为 X 的稠密真子集，则 $A^0=\{0\}$，但是 $A\neq X$。

定理 1(双极定理 Bipolar)　设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，T 是 X 上的任一相容拓扑，A 是 X 的子集。则 A 的两次极 A^{00} 等于 A 的均衡凸闭包。特别是，如取 T 为弱拓扑 $\sigma(X, Y)$，则 A^{00} 是 A 的均衡凸 $\sigma(X, Y)$ 闭包。

证　由本章 §1 可知道，对于 X 中的集 A 的均衡凸闭包具有对偶不变性，即同 X 上的相容拓扑 T 的选取无关。设 A 的均衡凸闭包为 C，则由性质(I)可知道，$C\subset A^{00}$。下面证明相反方向的包含关系。设 $x_0\overline{\in} C$，则由第二章 §3 中的定理 5，必存在 (X, T) 上的连续线性泛函 f，使

$$|f(x_0)|>1，而 \sup_{x\in C}|f(x)|\leqslant 1。\tag{4}$$

因为 T 是相容拓扑，所以必对某个 $y\in Y$，使 $f(x)=\langle x, y\rangle$。则由(4)即可知：$f\in C^0\subset A^0$。而由 $|f(x_0)|>1$ 可知 $x_0\overline{\in} A^{00}$，所以 $A^{00}\subset C$。证毕。

推论 1　设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，T 是 X 上的相容拓扑，如果 A 是 (X, T) 中的均衡凸闭集，则集 A 必定是 Y 中某个集 B 的极。即存在 $B\subset Y$，使得 $A=[B]^0_X$。

证　由于定理 1，$A=A^{00}=[[A]^0_Y]^0_X$，只要令 $B=[A]^0_Y$ 即可。

推论 2　如果 A 是 X 的线性子空间，则 $A^{00}=A^-$。

推论 3　设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$\{A_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$ 是 X 中的一族

均衡凸$\sigma(X, Y)$闭集，而$A = \bigcap\{A_\alpha, \alpha \in \mathscr{A}\}$，则$A^0$等于$\bigcup\{A_\alpha^0, \alpha \in \mathscr{A}\}$的均衡凸$\sigma(Y, X)$闭包。

证 令M为$\bigcup\{A_\alpha^0, \alpha \in \mathscr{A}\}$均衡凸$\sigma(Y, X)$闭包，则由(VII)可知

$$M^0 = (\bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} A_\alpha^0)^0 = \bigcap A_\alpha^{00} = \bigcap A_\alpha = A.$$

所以$A^0 = M^{00} = M$。证毕。

下面关于稠密线性子空间的定理是很有用的。

定理 2 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，A是Y中的子集，则A的线性包在Y上关于弱拓扑$\sigma(Y, X)$稠密的充要条件为A在X上是全的，即对X中每个$x \neq 0$，必存在$f \in A$，使$\langle x, f\rangle \neq 0$。

证 设G是集A在Y中张成的线性子空间，根据定理1的推论2，$G^{00} = \overline{G}$，其中$\overline{G}$是G关于$\sigma(Y, X)$拓扑的闭包。如果G在Y中关于弱拓扑$\sigma(Y, X)$稠密，则$G^{00} = Y$，所以$G^{000} = Y^0$。根据性质(IV)，$G^0 = Y^0$。而由对偶空间满足分离性的假定，$Y^0 = \{0\}$。所以$G^0 = \{0\}$，即G在X上是全的，而这等价于A在X上是全的。反过来也可一样证明，只要把上述推理倒过来即可。证毕。

在对偶空间$\langle X, Y\rangle$的讨论中，X中的关于弱拓扑$\sigma(X, Y)$的有界集有时简单地称为有界集。由于集的有界性具有对偶不变性，对于某相容拓扑的有界集简称为有界集是方便的。下述关于有界集的极的定理，对于以后的一致收敛拓扑的讨论是有用的。

定理 3 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，则有下述结论。

(a) X中的子集A是$\sigma(X, Y)$有界的充要条件为：$A^0 = [A]_Y^0$在0点吸收；

(b) 设A是X中的子集，则A^0是$\sigma(Y, X)$有界的充要条件为：A的均衡凸$\sigma(X, Y)$闭包A^{00}在0点吸收。

证 (a) 设A是有界集，$A^0 = [A]_Y^0$，对于任一$y \in Y$，由于A是有界集，必存在某常数M，使得

$$x \in A \Rightarrow |\langle x, y\rangle| < M.$$

所以$\frac{y}{M} \in A^0$。现在取$\delta = \frac{1}{M}$，则当$|t| \leqslant \delta$时，由于A^0是均衡的，

$ty\in A^0$，即 A^0 是 Y 中的吸收集。反之，如果 A^0 是吸收的，对每一个 $y\in Y$，存在 $M>0$，使得 $y\in MA^0$，即当 $x\in A$ 时，

$$|\langle x, y\rangle| = M\left|\langle x, \frac{y}{M}\rangle\right|\leqslant M.$$

这表明 A 是 X 中的有界集。

(b) 考虑到 $A^{00}=(A^0)^0$，对 A^0，$(Y,\sigma(Y,X))$应用(a)即可。

这里我们给桶式空间一个等价的定义。线性拓扑空间中每个均衡凸闭吸收集称为一个桶。

引理 1 局部凸线性拓扑空间是桶式空间的充要条件为每个桶是 0 的环境。

证 设 X 是局部凸空间，我们只要注意以下事实：

(1) X上的拟范数 $p(x)$是下半连续的充要条件为：相应的单位球 $V_p=\{x|p(x)\leqslant 1\}$ 是闭集。

事实上，如果 $p(x)$ 下半连续，$x_\nu\in V_p$ 且 $x_\nu\to x_0\in X$。由于 $p(x)$在 x_0 点下半连续，对任一 $\varepsilon>0$，存在 x_0 的环境 V_{x0}，使

$$x\in V_{x0}\Rightarrow p(x_0)-\varepsilon\leqslant p(x).$$

由于 x_0 的任何环境均包含$\{x_\nu\}$中的点，故 $p(x_0)-\varepsilon\leqslant 1$，令 $\varepsilon\to 0$，即知 $p(x_0)\leqslant 1$，$x_0\in V_p$，V_p 是闭集。反之，如果 V_p 是闭集，对任一 $x_0\in X$，$U=\{x|p(x)>p(x_0)-\varepsilon\}$是包含 0 的开集，即知 $p(x)$在 x_0 点下半连续。

(2) 拟范数 $p(x)$连续的充要条件为：$V_p=\{x|p(x)\leqslant 1\}$ 是 0 的环境；

(3) T 是 X 中一个桶的充要条件为：存在一个下半连续的拟范数 $p(x)$，使 $T=\{x|p(x)\leqslant 1\}$。

由(1)、(2)、(3)即知引理的结论。证毕。

定理 4 设 X 是桶式空间，即 X' 中的子集 B 是等度连续的充要条件为：B 是 $\sigma(X',X)$有界的。

证 考虑自然对偶 $\langle X,X'\rangle$，首先证明对于任一局部凸空间 X，$B\subset X'$ 是等度连续的充要条件为 $B^0=[B]^\wedge_X$ 是 X 中 0 的环境。事实上，如果 B^0 是 0 的环境，则当 $x\in B^0$ 时，对每个 $f\in B$，必有

$|\langle x, f\rangle|\leqslant 1$，所以 B 是等度连续的。反之，如 B 是等度连续的，则必存在连续拟范数 $p(x)$，记 $V_p=\{x|p(x)\leqslant 1\}$，当 $x\in V_p$ 时，对每个 $f\in B$，$|\langle x, f\rangle|\leqslant 1$，所以 $V_p\subset B^0$，B^0 是 0 的环境。同时，根据定理 3 的 (a)，B 是 $\sigma(X', X)$ 有界的充要条件为 B^0 在 0 点吸收，即 B^0 是 X 中的桶。由假定，X 是桶式空间，B 是 $\sigma(X', X)$ 有界的充要条件为 B^0 是 0 的环境。综合上述，即得证明。

注 对于极 A^r，双极定理有如下类似形式：设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，A 是 X 中的子集，则 A^{rr} 是 $A\cup\{0\}$ 的 $\sigma(X, Y)$ 闭凸包。

§3 一致收敛拓扑 $T_{\mathscr{A}}$

在此还是以弱拓扑作为例子。设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$\mathscr{F}$ 是 Y 中所有有限子集全体，则 X 上的弱拓扑可以由拟范数族 $\{p_F(x)|F\in\mathscr{F}\}$ 给定。其中，对于每个 $F\in\mathscr{F}$，令

$$p_F(x)=\sup_{y\in F}|\langle x, y\rangle|.$$

这样，X 上的弱拓扑 $\sigma(X, Y)$ 可以看作在 $\mathscr{F}$ 中集上的一致收敛拓扑。

相应于拟范数 $p_F(x)$ 的单位球，有

$$\{x, p_F(x)\leqslant 1\}=\{x|\sup_{y\in F}|\langle x, y\rangle|\leqslant 1\}=F^0.$$

所以 F^0 是 X 中 0 的 $\sigma(X, Y)$ 拓扑环境。容易知道 $\{F^0|F\in\mathscr{F}\}$ 是 X 中 0 点的 $\sigma(X, Y)$ 拓扑环境基。

更一般地，如果在 Y 上给定适当的子集类 $\mathscr{A}$，在 X 上可以引入 $\mathscr{A}$ 上一致收敛拓扑。对于每个 $A\in\mathscr{A}$，令

$$p_A(x)=\sup_{y\in A}|\langle x, y\rangle|. \tag{1}$$

为了使得 $V=\{x|p_A(x)\leqslant 1\}=A^0$ 是 X 上某向量拓扑 0 的环境，A^0 必须是吸收的，根据 §2 中的定理 3，其充要条件为：A 必须是有界的（即 $\sigma(Y, X)$ 有界集），所以 $\mathscr{A}$ 必须由有界集组成。

定义 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$\mathscr{A}$ 是 Y 中由 $\sigma(Y, X)$ 有界集组成的集族。则在线性空间 X 上，由拟范数族 $\{p_A(x), A\in\mathscr{A}\}$ 定义

一个局部凸向量拓扑，称为在$\mathscr{A}$上一致收敛拓扑。记为$T_{\mathscr{A}}$。

对于集族$\mathscr{A}$，如果其併集$\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}} A$在$X$上是全的，则称$\mathscr{A}$在$X$上是全的，或简称全的。

(I) X上的局部凸拓扑$T_{\mathscr{A}}$是分离的充要条件为$\mathscr{A}$是全的。

证 因为X上的$T_{\mathscr{A}}$拓扑由拟范数族$\{p_A(x), A\in\mathscr{A}\}$决定，所以$T_{\mathscr{A}}$是分离的充要条件为：对任一$x\in X$, $x\neq 0$，能找到某个$A\in\mathscr{A}$，使得$p_A(x)=\sup\limits_{y\in A}|\langle x, y\rangle|\neq 0$，即至少有一点$y_0\in\mathscr{A}$，使得$\langle x, y_0\rangle\neq 0$，即知$\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}} A$在$X$上是全的。证毕。

由§2中的定理2可得下述等价形式：

(I)′ X上的拓扑$T_{\mathscr{A}}$是分离的充要条件为：$\mathscr{A}$中的子集全体张成的线性子空间在Y中按$\sigma(Y, X)$拓扑稠密。

根据前面已经看到的，如果取$\mathscr{A}$为Y中所有的有限子集全体，$T_{\mathscr{A}}=\sigma(X, Y)$，对于每个对偶空间$\langle X, Y\rangle$，在$Y$上存在最大的有界集族，即$\mathscr{A}$是$Y$中$\sigma(Y, X)$有界集全体。而相应的一致收敛拓扑$T_{\mathscr{A}}$称为$X$上的强拓扑，记作$\beta(X, Y)$，它是$X$上(相应于$\langle X, Y\rangle$)的最强一致收敛拓扑。

如果X是局部凸空间。考虑自然对偶$\langle X, X'\rangle$，通常称$\beta(X', X)$为X'上的强拓扑；称$\beta(X, X')$为X上的强拓扑。一般说来，X上的强拓扑$\beta(X, X')$和X中原来的拓扑不一样。

这里需要指出，对于对偶空间，X上的一致收敛拓扑$T_{\mathscr{A}}$不一定是相容拓扑，后面将给出例子。

定理1 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，X上的向量拓扑T是某一个一致收敛拓扑$T_{\mathscr{A}}$的充要条件为：存在0点的一组环境基$\mathscr{B}$，使$\mathscr{B}$中的每一个集都是X中的弱桶。

证 如果$T=T_{\mathscr{A}}$，$\mathscr{A}$是Y中某有界集族，对于每个$A\in\mathscr{A}$，由于A是有界集，所以A^0是均衡凸$\sigma(X, Y)$闭吸收集，是X中的弱桶。由$\{x|p_A(x)\leqslant\varepsilon\}=\varepsilon A^0$知

$$U(A_1, \cdots, A_n, \varepsilon)=\{x|p_{A_1}(x)\leqslant\varepsilon, \cdots, p_{A_n}(x)\leqslant\varepsilon\}$$

$$=\bigcap_{i=1}^{n}\{x\mid p_{A_i}(x)\leqslant\varepsilon\}$$

是一个弱桶，而其全体组成 0 的环境基。

反之，如关于拓扑 T 存在由弱桶组成的 0 点的环境基 $\mathscr{B}$。令 $\mathscr{A}=\{U^0, U\in\mathscr{B}\}$，则有 $T=T_{\mathscr{A}}$。事实上，$T_{\mathscr{A}}$ 拓扑由拟范数族 $\{p_A(x), A\in\mathscr{A}\}$ 导出，任取 $U^0\in\mathscr{A}$，由于 U 是弱桶，从而

$$\{x\mid p_{U^0}(x)\leqslant 1\}=U^{00}=U.$$

所以 $p_{U^0}(x)$ 关于拓扑 T 连续，由此 $T_{\mathscr{A}}\subset T$。相反地，设 $U\in\mathscr{B}$，则 $U^0\in\mathscr{A}$，$U=U^{00}=(U^0)^0\in\mathscr{N}(T_{\mathscr{A}})$ 得到 $T\subset T_{\mathscr{A}}$。证毕。

由于对偶不变性，X 中关于弱拓扑的均衡凸闭吸收集等价于关于任一相容拓扑的均衡凸闭吸收集，所以定理 1 中的弱桶可等价地改为关于任一相容拓扑的桶。但是如果假定 $\mathscr{B}$ 中的集是 T 桶，则定理不再成立。实际上，对于任一局部凸向量拓扑 T，总存在由 T 拓扑桶组成的 0 的环境基。

定理 2 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 分别是 Y 中的弱有界集族。则 X 上的 $T_{\mathscr{A}}$ 拓扑 $\subset T_{\mathscr{B}}$ 拓扑的充要条件为：对于每一个集 $A\in\mathscr{A}$，存在有限个集 $B_1, \cdots, B_m\in\mathscr{B}$，以及正数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$，使得

$$A\subset[\Gamma(\lambda_1B_1\cup\cdots\cup\lambda_mB_m)]^{-}_{\sigma(Y,X)}, \tag{2}$$

其中 $\Gamma(M)$ 表示集 M 的均衡凸包。

证 充分性：如果(2)式成立，则有

$$p^A(x)\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant m}\{\lambda_jp^{B_j}(x)\}\leqslant\lambda_1p^{B_1}(x)+\cdots+\lambda_mp^{B_m}(x).$$

所以 $T_{\mathscr{A}}\subset T_{\mathscr{B}}$。

必要性：如果 $T_{\mathscr{A}}\subset T_{\mathscr{B}}$，则对于每个 $A\in\mathscr{A}$，$p^A(x)$ 关于 $T_{\mathscr{B}}$ 是连续的，所以必存在 $B_1, \cdots, B_m\in\mathscr{B}$，$c_1, \cdots, c_m>0$，使得

$$p^A(x)\leqslant c_1p^{B_1}(x)+\cdots+c_mp^{B_m}(x)$$
$$\leqslant m\max_{1\leqslant j\leqslant m}\{c_jp^{B_j}(x)\}=p^B(x),$$

其中 $B=m\,(c_1(\Gamma B_1)\cup\cdots\cup c_m(\Gamma B_m))$，令 $\lambda_j=mc_j\ (j=1, 2, \cdots, m)$，则由双极定理可得到

$$A\subset A^{00}\subset B^{00}=[\Gamma B]^{-}_{\sigma(Y,X)},$$

即知(2)式成立。证毕。

设 $\mathscr{A}$ 是一个集族，$\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}$ 是一个子集族。如果对于每个 $A\in\mathscr{A}$，总包含在 $\mathscr{A}_1$ 的某集中，则称 $\mathscr{A}_1$ 为 $\mathscr{A}$ 的基本子集族，由定理 2 可得下述推论。

推论 1 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$\mathscr{A}$ 是 Y 中有界集族，如果 $\mathscr{A}_1$ 是 $\mathscr{A}$ 的基本子集族，则 X 上的一致收敛拓扑

$$T_{\mathscr{A}_1}=T_{\mathscr{A}}. \tag{3}$$

先引进一个定义：

定义 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$\mathscr{B}$ 是 Y 中由有界集组成的集族，如果满足下列条件：

(a) 对 $B\in\mathscr{B}$，如果集 $A\subset B$，则 $A\in\mathscr{B}$；

(b) 如 $A, B\in\mathscr{B}$，则 $A\cup B\in\mathscr{B}$；

(c) 如 $B\in\mathscr{B}$，则 $[\Gamma B]^{-}_{\sigma(Y,X)}\in\mathscr{B}$；

(d) 如 $B\in\mathscr{B}$，λ 是任一数，则 $\lambda B\in\mathscr{B}$。

则称集族 $\mathscr{B}$ 是饱和的(saturated)。

设 $\mathscr{A}$ 是 Y 中的由有界集组成的集族，记 $\tilde{\mathscr{A}}$ 为由 $\mathscr{A}$ 张成的饱和集族。容易知道，$\tilde{\mathscr{A}}$ 是所有包含 $\mathscr{A}$ 的饱和集族的交，总是存在的，由定理 2 可得下述结论：

推论 2 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$\mathscr{A}$ 是 Y 中有界集族，设 $\tilde{\mathscr{A}}$ 是由 $\mathscr{A}$ 张成的饱和集族，则 X 上的一致收敛拓扑

$$T_{\mathscr{A}}=T_{\tilde{\mathscr{A}}}.$$

所以在讨论 X 上的一致收敛拓扑 $T_{\mathscr{A}}$ 时，可不妨假设集族 $\mathscr{A}$ 是饱和的，或者假定 $\mathscr{A}$ 是一个饱和集族中的由均衡凸弱闭集组成的基本子集族即可。

定理 3 在定理 2 中，如果 $\mathscr{B}$ 是 Y 中的饱和集族，则 $T_{\mathscr{A}}\subset T_{\mathscr{B}}$ 的充要条件为 $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$。

定理 4 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$\mathscr{A}$ 是 Y 中的饱和集族，且是全的，则 $N=\{A^0, A\in\mathscr{A}\}$ 组成 X 上的 $T_{\mathscr{A}}$ 拓扑在 0 点的环境基。

证 由于 $A^0\cap B^0=(A\cup B)^0$，$\lambda A^0=\left(\dfrac{A}{\lambda}\right)^0$. 故由 $\{A^0, A\in\mathscr{A}\}$

全体可以唯一地确定X中的局部凸向量拓扑T，使$\{A^0, A\in\mathscr{A}\}$是T拓扑在0点的环境基。首先，因为$A^0=\{x|p_A(x)\leqslant 1\}$，$A^0$必是$T_{\mathscr{A}}$拓扑0的环境，所以$T\subset T_{\mathscr{A}}$。其次。因为$\mathscr{A}$是饱和的，$T_{\mathscr{A}}$拓扑0的环境基可由$\{x|p_A(x)\leqslant e\}$ $(A\in\mathscr{A})$全体组成。由

$$\{x|p_A(x)\leqslant e\}=\left(\frac{A}{e}\right)^0\in N,$$

所以$T_{\mathscr{A}}\subset T$，即得$T_{\mathscr{A}}=T$。证毕。

§4 可允许拓扑

在§3中讨论了关于对偶空间的一致收敛拓扑$T_{\mathscr{A}}$。但是如果$\mathscr{A}$中的集包含的点不多，则相应的拓扑$T_{\mathscr{A}}$就不足够强，Y中的点就可能不是$(X, T_{\mathscr{A}})$上的连续线性泛函。下面我们对集族$\mathscr{A}$作一些必要的限制。

定义 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，$\mathscr{A}$是Y中的有界集族，如果X上的一致收敛拓扑$T_{\mathscr{A}}$强于弱拓扑，即$T_{\mathscr{A}}\supset\sigma(X, Y)$，则称$X$上的$T_{\mathscr{A}}$拓扑为关于对偶$\langle X, Y\rangle$的可允许拓扑(admissible)。而称相应的有界集族$\mathscr{A}$为Y上的关于$\langle X, Y\rangle$的可允许集族。

由于X上关于$\langle X, Y\rangle$的可允许拓扑$T_{\mathscr{A}}$是强于$\sigma(X, Y)$的局部凸向量拓扑，所以Y中的每一个元(严格地讲是$\hat{y}$)是$(X, T_{\mathscr{A}})$上的连续线性泛函。反过来，如果X上某个一致收敛拓扑$T_{\mathscr{A}}$，使得$Y\subset(X, T_{\mathscr{A}})'$，则$\sigma(X, Y)\subset T_{\mathscr{A}}$，$T_{\mathscr{A}}$必定是可允许拓扑。

(I) 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，$\mathscr{A}$是Y中$\sigma(Y, X)$有界集族。如果$\bigcup\{A, A\in\mathscr{A}\}$的线性包是$Y$，则$X$上的拓扑$T_{\mathscr{A}}$是可允许拓扑。

证 只要说明对于每一个$f\in Y$，$\hat{f}(x)=\langle x, f\rangle (x\in X)$是$(X, T_{\mathscr{A}})$上的连续线性泛函。即说明$\sigma(X, Y)\subset T_{\mathscr{A}}$。由假设，$Y$是$\bigcup\{A, A\in\mathscr{A}\}$的线性包，所以

$$f=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\cdots+\lambda_m f_m,$$

其中$\lambda_i (i=1, \cdots, m)$是数，$f_i\in A_i\in\mathscr{A} (i=1, \cdots, m)$，由$p^A(x)$的

定义，得

$$|\hat{f}(x)| = |\langle x, f\rangle| \leqslant |\lambda_1| p^{A_1}(x) + \cdots + |\lambda_m| p^{A_m}(x), \ x \in X.$$

即知 $\hat{f}$ 是$(X, T_{\mathscr{A}})$上的连续函数。证毕。

定理 1 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，X 上的局部凸向量拓扑T是可允许的充要条件为满足下述条件：

(a) $T \supset \sigma(X, Y)$；

(b) 局部凸向量拓扑T由拟范数族S决定，而每个$p \in S$关于弱拓扑$\sigma(X, Y)$是下半连续的。

证 必要性：如果T是X上的可允许拓扑，则存在Y上的可允许有界集族$\mathscr{A}$，使$T = T_{\mathscr{A}}$，所以T拓扑可由拟范数族$\{p^A(x), A \in \mathscr{A}\}$决定。由定义，$p^A(x) = \sup\limits_{y \in A} |\langle x, y\rangle|$，它是$\sigma(X, Y)$连续函数$|\langle x, y\rangle|$的上确界，所以$p^A(x)$是$\sigma(X, Y)$下半连续的。

充分性：设拓扑T由拟范数族S决定，而每个$p(x) \in S$关于$\sigma(X, Y)$是下半连续的，则$V_p = \{x | p(x) \leqslant 1\}$是关于弱拓扑$\sigma(X, Y)$的均衡凸闭集。令$A = V_p^0$，则$V_p = V_p^{00} = A^0 = \{x | p^A(x) \leqslant 1\}$，因此

$$p(x) = p^A(x) = \sup_{y \in A} |\langle x, y\rangle|, \ x \in X.$$

即T是$\mathscr{A} = \{V_p^0, p \in S\}$上的一致收敛拓扑$T_{\mathscr{A}}$。再由条件(a)即知$T$是$X$上的可允许拓扑。证毕。

由于拟范数$p(x)$是下半连续的充要条件为$V_p = \{x | p(x) \leqslant 1\}$是闭集，所以定理 1 中的条件(b)等价于

(b)′ 关于拓扑T存在 0 的一组环境基$\mathscr{B}$，使$\mathscr{B}$中的每一个集都是X中的$\sigma(X, Y)$-桶。

下述定理说明了研究对偶空间中的可允许拓扑具有普遍意义。任何局部凸空间X，其上的拓扑关于自然对偶$\langle X, X'\rangle$是可允许的。

定理 2 设(X, T)是局部凸线性拓扑空间，X'是X的共轭空间。令$\mathscr{E}$是X'上(关于T)的等度连续集合全体，则T必等价于$\mathscr{E}$上的一致收敛拓扑$T_{\mathscr{E}}$，即$T = T_{\mathscr{E}}$，从而T关于对偶$\langle X, X'\rangle$是可

允许的。

证 设 $p(x)$是X上的任一连续拟范数，则关于 $p(x)$的单位球 $V=\{x|p(x)\leqslant 1\}$ 是 0 的均衡凸闭环境。由 Hahn-Banach 定理的推论，V 必是弱拓扑 $\sigma(X, X')$闭的。令 $E=V^0$，则由双极定理，

$$V=V^{00}=E^0=\{x|p^E(x)\leqslant 1\},$$

所以

$$p(x)=p^E(x),\ x\in X.$$

由于V是X中 0 的环境，$E=V^0$ 是 X' 中等度连续集合，所以 $T\subset T_{\mathscr{E}}$。反过来，设E是X' 中任一等度连续集合，则必存在X上的连续拟范数 $p(x)$，使对每个 $f\in E$，有

$$p(x)\leqslant 1\Rightarrow|f(x)|\leqslant 1.$$

所以当 $p(x)\leqslant 1$ 时，$p^E(x)=\sup\limits_{f\in E}|f(x)|\leqslant 1$，容易知道

$$p^E(x)\leqslant p(x),\ x\in X,$$

$p^E(x)$是X上的连续拟范数，所以 $T_{\mathscr{E}}\subset T$。

这就证明了 $T=T_{\mathscr{E}}$，X 上的拓扑T可以由拟范数族 $\{p^E(x)|E\in\mathscr{E}\}$决定。$T\supset\sigma(X, X')$是显然的，所以$T$关于自然对偶$\langle X, X'\rangle$是一个可允许拓扑。证毕。

推论 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，则X上的每一个相容拓扑T是关于对偶$\langle X, Y\rangle$的可允许拓扑。

证 由于T是相容拓扑，$(X, T)'=Y$，$\langle X, Y\rangle$即$\langle X, X'\rangle$，对局部凸空间(X, T)应用定理 2 即可知。

必须注意的是：可允许拓扑不一定是相容拓扑。例如设X是非自反的线性赋范空间。考虑自然对偶$\langle X, X'\rangle$，取$\mathscr{B}$为X上有界集全体(由 Mackey 定理，$\mathscr{B}$ 即是X上的弱有界集全体)，则X'上的强拓扑 $\beta(X', X)=T_{\mathscr{B}}$ 是 X' 上的可允许拓扑，它就是 X' 上的范数拓扑。但由于X是非自反的，$(X', \beta(X', X))'=X''\neq X$，所以$\beta(X', X)$不是 X' 上的相容拓扑。

下面给出可允许拓扑的一个等价条件，由它很容易构造不是可允许的一致收敛拓扑 $T_{\mathscr{A}}$。

定理 3 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，$\mathscr{A}$ 是Y中有界集组成的饱和

集族，则$T_{\mathscr{A}}$是可允许拓扑的充要条件是：

$$\bigcup\{A, A\in\mathscr{A}\}=Y. \tag{1}$$

证 记Y中有限个点的集合全体为$\mathscr{F}$。则$\sigma(X, Y)=T_{\mathscr{F}}$，如果$T_{\mathscr{A}}$是$X$上的可允许拓扑，必须且只须$T_{\mathscr{A}}\supset\sigma(X, Y)$，则由§3中定理3的充要条件为$\mathscr{F}\subset\mathscr{A}$，而这等价于$Y=\bigcup\{A, A\in\mathscr{A}\}$。证毕。

关于可允许拓扑的完备性定理

设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，则在X上有可能构造许多不同的可允许拓扑，它们中最弱的是弱拓扑$\sigma(X, Y)$，最强的可允许拓扑是强拓扑$\beta(X, Y)$。下述重要定理表明，如果X关于某个可允许拓扑T是完备的，则X一定关于所有比T强的可允许拓扑完备。所以，如果X关于$\sigma(X, Y)$完备，则X关于一切可允许拓扑都是完备的。

定理 4 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间。T和$T_{\mathscr{A}}$是X上的两个可允许拓扑，满足$T\subset T_{\mathscr{A}}$。如果X的子集S关于拓扑T是完备的，则S关于较强的可允许拓扑$T_{\mathscr{A}}$必也是完备的。

证 由§3中的定理2的推论，不妨设$\mathscr{A}$是一个饱和集族，则由§3中的定理4，$\mathscr{B}=\{A^0, A\in\mathscr{A}\}$是0点的$T_{\mathscr{A}}$拓扑环境基。对每一个$V\in\mathscr{B}$，可表为$V=A^0$，$A\in\mathscr{A}$，则$V$是$X$中的均衡凸$\sigma(X, Y)$闭吸收集。又按照假定$T$是可允许拓扑，所以$\sigma(X, Y)\subset T$。因此$V$关于拓扑$T$也是闭集。由$V=A^0=\{x\,|\,p^A(x)\leqslant 1\}$，所以$p^A(x)$是关于拓扑$T$的下半连续拟范数。这样，定理由第二章§1中的定理2即知。证毕。

本定理对序列完备及有界完备也同样成立。特别有

推论 在定理4的条件下，如果(X, T)是完备的(序列完备；有界完备)，则$(X, T_{\mathscr{A}})$必也是完备的(序列完备；有界完备)。

定理 5 设(X, T)是局部凸空间，则X中每个弱紧子集A是完备的。

证 考虑自然对偶$\langle X, X'\rangle$，则由定理2，拓扑T和弱拓扑$\sigma(X, X')$都是X上的可允许拓扑，且$\sigma(X, X')\subset T$。如果A是弱拓扑$\sigma(X, X')$紧子集，则由第一章§10中的定理1，A是$\sigma(X, X')$

完备的。由定理 4 即知 A 必是 T 拓扑完备的。证毕。

最后，需要指出，对于非可允许拓扑，定理 4 的结论不必成立。

§5 Mackey-Arens 定理

在本节中，给出对偶空间中 Mackey 拓扑的具体构造，并指出同 T_K 拓扑的关系。由 §1 中的定理 3 知道，如果 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，X 上必定存在最强的相容拓扑 $\tau(X, Y)$，称为 Mackey 拓扑。由于 §4 中定理 2 的推论，相容拓扑 $\tau(X, Y)$ 一定是可允许拓扑。我们把决定 $\tau(X, Y)$ 的相应集族 $\mathscr{A}$ 找出来，使得 $\tau(X, Y)=T_{\mathscr{A}}$。

引理 1 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，T 是 X 上的任一相容拓扑。则对于 Y 中任一（关于拓扑 T）等度连续集合 S，其相应的 $S^{00}=[[S]_X^0]_Y$ 是 Y 中的弱拓扑 $\sigma(Y, X)$ 紧子集。

证 因 S 是 Y 中的等度连续集合，则必存在 X 中 0 的 T 拓扑环境 V，使对每一个 $f\in S$，有

$$x\in V\Rightarrow|\hat{f}(x)|=|\langle x, f\rangle|\leqslant 1.$$

所以 $V\subset[S]_X^0$，S^0 是 0 的 T 拓扑环境。所以由 Alaoglu-Bourbaki 定理即知均衡凸弱闭集 $S^{00}=[[S]_X^0]_Y^0$ 是 $\sigma(Y, X)$ 紧的。证毕。

由于 §4 中定理 2 的推论，每个相容拓扑 T 等于 Y 中等度连续集合 $\mathscr{E}$ 上的一致收敛拓扑 $T_{\mathscr{E}}$。对于每个 $S\in\mathscr{E}$，由于 S^0 是 X 中 0 的 T 拓扑环境，S^{00} 也是 Y 中（关于 T 拓扑）的等度连续集合，所以 $S^{00}\in\mathscr{E}$。因为 $S\subset S^{00}$，$\mathscr{E}_1=\{S^{00}, S\in\mathscr{E}\}$ 是 $\mathscr{E}$ 中的一个基本子集族，所以 $T_{\mathscr{E}}=T_{\mathscr{E}_1}$。又由引理 1，$\mathscr{E}_1$ 中的每个集合都是 Y 中的均衡凸弱紧子集，所以我们很自然地可想到构造下述拓扑 $\tau(X, Y)$。为叙述方便起见，我们暂且撇开以前的定义。在证明了 Mackey-Arens 定理以后，我们就可知道这里定义的 Mackey 拓扑 $\tau(X, Y)$ 和以前在 §1 中的定义是一致的。

定义 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$\mathscr{A}$ 是 Y 中均衡凸弱紧子集全体，则 X 上的一致收敛拓扑 $T_{\mathscr{A}}$ 称为 X 上关于对偶 $\langle X, Y\rangle$ 的 Mackey 拓扑，或简称 X 上的 Mackey 拓扑。记为 $\tau(X, Y)$。

引理 2 关于对偶空间$\langle X, Y\rangle$，上述$\tau(X, Y)$是相容拓扑，即$(X, \tau(X, Y))' = Y$。

证 由假定$\mathscr{A}$是Y中均衡凸$\sigma(Y, X)$紧子集全体，$\tau(X, Y) = T_{\mathscr{A}}$，$X$上局部凸向量拓扑$\tau(X, Y)$由拟范数族$\{p^A(x), A\in\mathscr{A}\}$决定，其中$p^A(x) = \sup\limits_{y\in A}|\langle x, y\rangle|$。设$f\in(X, \tau(X, Y))'$，则由第二章§1性质(II)，必存在$A_1, \cdots, A_n\in\mathscr{A}$以及正数$c_1, \cdots, c_n$，使得

$$|f(x)| \leqslant c_1 p^{A_1}(x) + \cdots + c_n p^{A_n}(x), \ x\in X.$$

令$B = n(c_1A_1\cup c_2A_2\cup\cdots\cup c_nA_n)$，则$B$也是均衡凸弱紧子集，所以$B\in\mathscr{A}$，容易验证。

$$|f(x)| \leqslant p^B(x), \quad x\in X. \tag{1}$$

下面证明$f\in B^{00}\subset Y$。为此，考虑对偶空间$\langle X, X^*\rangle$。其中X^*表示X上的线性泛函全体。容易知道，$(Y, \sigma(Y, X))$可以看作$(X^*, \sigma(X^*, X))$的子空间，则由于$B\subset Y\subset X^*$，B可以看作X^*中关于$\sigma(X^*, X)$拓扑的均衡凸紧子集。令

$$B^0 = \{x\in X \,\big|\, |\langle x, f\rangle| \leqslant 1, \text{对 } f\in B\} = \{x\in X \,\big|\, p^B(x)\leqslant 1\},$$

则由(1)式，当$x\in B^0$时，$|f(x)|\leqslant 1$，所以

$$f\in B^{00} = [[B]^0_X]^0_{X^*}. \tag{2}$$

对于对偶空间$\langle X, X^*\rangle$应用双极定理，得到

$$[[B]^0_X]^0_{X^*} = [B]^-_{\sigma(X^*, X)} = B. \tag{3}$$

在(3)式中用到了B是均衡凸弱紧子集这一点。所以，由(2)式，$f\in B\subset Y$，即对于某个$y\in Y$，使得

$$f(x) = \langle x, y\rangle, \ x\in X.$$

这就证明了$(X, \tau(X, Y))'\subset Y$，另一方面，由于$\sigma(X, Y)\subset\tau(X, Y)$可知道$(X, \tau(X, Y))'\supset(X, \sigma(X, Y))' = Y$。所以$(X, \tau(X, Y))' = Y$，即$\tau(X, Y)$是$X$上关于对偶$\langle X, Y\rangle$的相容拓扑。证毕。

定理 1(Mackey-Arens 定理) 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，$\sigma(X, Y)$和$\tau(X, Y)$分别表示X上的弱拓扑和 Mackey 拓扑。则X上的局部凸向量拓扑T是相容的充要条件是

$$\sigma(X, Y)\subset T\subset\tau(X, Y)。 \tag{4}$$

证 必要性：如拓扑 T 是 X 上的相容拓扑，则 $(X, T)'=Y$，令 $\mathscr{E}$ 是 Y 上关于拓扑 T 的等度连续集合全体，则由 §4 的定理 2，$T=T_{\mathscr{E}}$。由于 $\mathscr{E}_1=\{S^{00}, S\in\mathscr{E}\}$ 是 $\mathscr{E}$ 中的基本子集族，又由引理 1 知 S^{00} 是 Y 中均衡凸 $\sigma(Y, X)$ 紧子集，所以

$$T=T_{\mathscr{E}}=T_{\mathscr{E}_1}\subset\tau(X, Y), \tag{5}$$

$\sigma(X, Y)\subset T$ 是明显的。

充分性：如果 $\sigma(X, Y)\subset T\subset\tau(X, Y)$，则必有

$$(X, \sigma(X, Y))'\subset(X, T)'\subset(X, \tau(X, Y))'. \tag{6}$$

由 §1 中的弱连续线性泛函的表示定理 $(X, \sigma(X, Y))'=Y$，以及由引理 2 $(X, \tau(X, Y))'=Y$，所以(6)式包含 $(X, T)'=Y$。证毕。

由 Mackey-Arens 定理，$\sigma(X, Y)$ 和 $\tau(X, Y)$ 分别是 X 上的最弱和最强的可允许拓扑。

定义 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$\mathscr{A}$ 是 Y 中有界集族，如果 $T_{\mathscr{A}}$ 是 X 上的相容拓扑，则称 $\mathscr{A}$ 为 Y 中的相容集族。

推论 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，则

(a) Y 中最大的相容集族是 Y 中均衡凸 $\sigma(Y, X)$ 紧子集全体所组成集族的饱和包。

(b) Y 中可允许集族 $\mathscr{A}$ 是相容的充要条件为：对于每一个 $A\in\mathscr{A}$，A^{00} 是 $\sigma(Y, X)$ 紧的。

证 由定理 1 和 §3 中的定理 3 即得。

在此需要指出，在 Mackey 拓扑 $\tau(X, Y)$ 的定义中，$\mathscr{A}$ 中的集必须是均衡凸 $\sigma(Y, X)$ 紧子集，其中均衡凸的条件不能去掉。如果 K 是 Y 的 $\sigma(Y, X)$ 紧子集，则 K 的均衡凸 $\sigma(Y, X)$ 闭包 K_0 一般只是完全有界集(precompact)。如果 K_0 是 $\sigma(Y, X)$ 完备时，才能断言 K_0 是弱紧的。设 Y 上弱紧集全体为 $\mathscr{K}$，则 X 中的在 $\mathscr{K}$ 上的一致收敛拓扑 $T_{\mathscr{K}}$ 可能严格强于 $\tau(X, Y)$。

例 1 设 Φ 是只有有限项不为零的序列全体，对于 $x\in\Phi$，$x=(x_1, x_2, \cdots)$ 定义范数

$$\|x\|_\infty=\max_i|x_i|.$$

则$(\Phi, \|\cdot\|_\infty)$是一个线性赋范空间。考虑自然对偶$\langle \phi, \phi' \rangle$。定义$\Phi$上的线性泛函$f_n(n=1, 2, \cdots)$。

$$f_n(x)=x_n, \quad x\in\Phi.$$

则$f_n\in\Phi'$。取Φ'中的集合$A=\{nf_n\}\cup\{0\}$，由于对每个$x\in\Phi$，

$$(nf_n)(x)=nx_n\to 0 \ (n\to\infty).$$

故$nf_n \xrightarrow{\sigma(\Phi', \Phi)} 0$，$A$是$\Phi'$中的$\sigma(\Phi', \Phi)$紧子集。另外由于$\Phi$在$c_0$空间中是稠密的，所以$\Phi'=l_1$，$\Phi'$上的强拓扑$\beta(\Phi', \Phi)$即是$l_1$中的范数拓扑$\|\cdot\|_1$。因为$\|nf_n\|_1=n$，所以$A$不是$\beta(\Phi', \Phi)$有界集。但是在§7中要指出，对于任何相容拓扑的等度连续集合必是强有界的。所以上述集合A不能是任何相容拓扑的等度连续集合。所以在Φ上$\tau(\Phi, \Phi')\subsetneqq T_{\mathscr{K}}$。

定义 设X是局部凸空间。如果对X中的每一个紧集K，它的均衡凸闭包K_0是完备的，则称X具有凸紧性。

容易知道，有界完备的局部凸线性拓扑空间具有凸紧性，但是，反过来不一定对。

定理 2 设局部凸空间(X, T)具有凸紧性，则对于自然对偶$\langle X, X'\rangle$，X上的任何比T强的可允许拓扑T'，(X, T')也具有凸紧性。

证 设K是(X, T')中的紧集。由于$T\subset T'$，集K关于拓扑T也是紧的。令K_0和K_1分别是K关于拓扑T和T'的均衡凸闭包。由于T具有凸紧性，K_0关于T是完备的。由于T'是比T强的可允许拓扑，由§4中的定理4知，K_0关于T'也是完备的。又因为$K_1\subset K_0$，K_1是(X, T')中的闭子集，所以K_1关于T'是完备的。证毕。

定理 3 设X是局部凸空间，$\mathscr{K}$是X中的紧子集全体。考虑自然对偶$\langle X, X'\rangle$，则X'中的一致收敛拓扑$T_{\mathscr{K}}$关于$\langle X, X'\rangle$是相容的充要条件为X具有凸紧性。

证 充分性：设$A\in\mathscr{K}$是X中的紧集。由双极定理，$A^{00}=[[A]_X^0]_X^0$是A的均衡凸弱闭包。由对偶不变性，A^{00}也是A的均

衡凸闭包。根据假定X具有凸紧性，所以 A^{00} 是X中的紧集，从而也是弱紧的。由定理1的推论即知 $\mathscr{K}$ 是X上关于 $\langle X, X'\rangle$ 的相容集族。$T_{\mathscr{K}}$ 是 X 上关于 $\langle X, X'\rangle$ 的相容拓扑。

必要性：设 $T_{\mathscr{K}}$ 是相容拓扑。取 $A\in\mathscr{K}$，A 是X中的紧集，所以 $A^0=\{f\in X' \mid p^A(f)\leqslant 1\}$ 是 $(X', T_{\mathscr{K}})$ 中 0 的环境。其中

$$p^A(f)=\sup_{x\in A}|f(x)|,\quad f\in X'.$$

所以由 Alaoglu-Bourbaki 定理，$A^{00}=(A^0)^0=[[A]^0_{X'}]^0_X$ 是X中的 $\sigma(X, X')$ 紧子集。则根据 §4 中的定理 5，A^{00} 关于X中原来的拓扑 T 也是完备的，即证明了局部凸空间X具有凸紧性。证毕。

设 (X, T) 是局部凸空间，如果拓扑 T 等于关于自然对偶 $\langle X, X'\rangle$ 的 Mackey 拓扑 $\tau(X, X')$，即 $T=\tau(X, X')$，则称局部凸空间 (X, T) 为 Mackey 空间。

由定义容易知道，(X, T) 是 Mackey 空间的充要条件为：X' 中的每一个均衡凸 $\sigma(X', X)$ 紧子集是等度连续的。在 §9 中将指出，桶式空间和囿空间都是 Mackey 空间，特别是，赋范空间和赋可列拟范空间是 Mackey 空间。在应用中，遇到的局部凸空间中大多都是 Mackey 空间。

设 (X, T) 是局部凸空间，$(\tilde{X}, \tilde{T})$ 是它的完备化空间。则 (X, T) 上的每个连续线性泛函 f 必可以唯一地延拓为 $(\tilde{X}, \tilde{T})$ 上的连续线性泛函 $\tilde{f}$。从而在映照 $f\to\tilde{f}$ 下，$(X, T)'$ 和 $(\tilde{X}, \tilde{T})'$ 代数同构。所以在代数同构意义下，可以把 $(X, T)'$ 和 $(\tilde{X}, \tilde{T})'$ 看作是一样的。由第一章 §5 最后的结论可知道，每个 T-等度连续集合是 $\tilde{T}$-等度连续的，反过来也对。基于这个事实，可以得到下述定理：

定理 4 设 (X, T) 是 Mackey 空间，则它的完备包 $(\tilde{X}, \tilde{T})$ 也是一个 Mackey 空间。

证 考虑自然对偶 $\langle\tilde{X}, X'\rangle$，其中 $X'=\tilde{X}'$。设 A 是 X' 中的均衡凸 $\sigma(X', \tilde{X})$ 紧子集，则由于 $\sigma(X', X)\subset\sigma(X', \tilde{X})$，$A$ 也是 $\sigma(X', X)$ 紧子集。由于X是 Mackey 空间，A 是 T-等度连续集合，所以 A 也是 $\tilde{T}$-等度连续集合。这就证明了 $\tilde{X}$ 是 Mackey 空间。证毕。

§6 各种不同的拓扑

一、强拓扑

设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，$\mathscr{B}$是Y中($\sigma(Y, X)$)有界集全体，则相应的一致收敛拓扑$T_{\mathscr{B}}$称为X上关于对偶$\langle X, Y\rangle$的强拓扑，记为$\beta(X, Y)$。同样可以定义Y上的强拓扑$\beta(Y, X)$。我们已经知道X上强拓扑是X上的最强可允许拓扑。

X上强拓扑$\beta(X, Y)$可由拟范数族$\{p^A(x), A\in\mathscr{B}\}$给出，其中

$$p^A(x)=\sup_{y\in A}|\langle x, y\rangle|, x\in X. \tag{1}$$

通常，我们称X中的点集M为Y-有界的，即是指M是$\sigma(X, Y)$拓扑有界的，对每个$y\in Y$，有

$$\sup_{x\in M}|\langle x, y\rangle|\leqslant M_y<\infty. \tag{2}$$

X中的点集M称为强Y-有界的，是指M关于强拓扑$\beta(X, Y)$为有界集，即对Y中的每一个有界集B，有

$$\sup_{x\in M} p^B(x)=\sup_{x\in M, y\in B}|\langle x, y\rangle|\leqslant M_B<\infty. \tag{3}$$

显然，X中的强拓扑有界集必是弱有界的。

(I) 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，则X上关于强拓扑$\beta(X, Y)$在0点的一组环境基为X中$\sigma(X, Y)$桶全体。

证 设$\mathscr{B}$是Y中$\sigma(Y, X)$有界集全体，则$\mathscr{B}$是Y中的饱和集族。根据§3中的定理4，$\{B^0, B\in\mathscr{B}\}$全体是X中$\beta(X, Y)$拓扑0的环境基。又根据§2中的定理3，B^0是$\sigma(X,Y)$桶的充要条件为B是Y中$\sigma(Y, X)$有界集。所以$\{B^0, B\in\mathscr{B}\}$是X中$\sigma(X, Y)$桶全体。证毕。

设(X, T)是局部凸空间，考虑自然对偶$\langle X, X'\rangle$。根据(I)，X中的$\sigma(X, X')$桶全体是X上强拓扑在0点的环境基。又由于§1中的定理5，对于X上的相容拓扑，其桶是一样的，所以X上的强拓扑$\beta(X, X')$以(X, T)中桶的全体作为0点的环境基。同样，X'上

的强拓扑 $\beta(X', X)$ 以 $\sigma(X', X)$ 桶全体作为 0 点的环境基。

设 (X, T) 是局部凸空间，如果拓扑 $T=\beta(X, X')$，则称拓扑 T 是绝对强的。

(II) 设 (X, T) 是局部凸空间，则下述的条件是等价的：

(a) (X, T) 是桶式空间；

(b) $T=\beta(X, X')$。

证 设 (X, T) 是桶式空间，则桶的全体是 0 的环境基。根据 (I)，即知 $\beta(X, X')=T$，反过来，如果 $T=\beta(X, X')$，由于 (X, T) 中的桶一定是 $\sigma(X, Y)$ 拓扑桶，根据 (I)，即知每个桶是 $\beta(X, X')$ 拓扑 0 的环境，从而也是 T 拓扑 0 的环境，(X, T) 是桶式空间。

(III) 设 X 是局部凸空间，如果 E 是 X' 中的等度连续集合，则 E 是 $\beta(X', X)$ 有界集。

证 由于 E 是 X' 中的等度连续集合，必存在 X 中 0 的环境 U，使得对于每一个 $f\in E$，有

$$x\in U\Rightarrow |f(x)|\leqslant 1. \tag{4}$$

考虑自然对偶 $\langle X, X'\rangle$，根据 (4)，$E\subset U^0$。设 $\mathscr{B}$ 是 X 中的有界集全体，则 $\{B^0, B\in\mathscr{B}\}$ 是 Y 中 $\beta(X', X)$ 在 0 点的环境基。设 $V=B^0$，$B\in\mathscr{B}$ 是 X' 中任一 $\beta(X', X)$ 拓扑在 0 点的环境，因为 B 是有界集，所以 0 的环境 U 吸收 B。从而 B^0 吸收 U^0，即知 V 吸收 E，E 是 $\beta(X', X)$ 有界集。证毕。

还要指出一点：设 X 是局部凸空间，考虑自然对偶 $\langle X, X'\rangle$，由于 X 上的强拓扑 $\beta(X, X')$ 不一定是相容拓扑，X 中的有界集不一定是强拓扑 $\beta(X, X')$ 有界集。

二、T_{ω} 拓扑

定义 设 (X, T) 是局部凸空间，$\mathscr{A}$ 是 X 中所有收敛于 0 的序列（简称 0 序列）组成的集族。则 X' 上的一致收敛拓扑 $T_{\mathscr{A}}$ 称为 X' 上的 T_{ω} 拓扑。

考虑自然对偶 $\langle X, X'\rangle$，则 T_{ω} 是 X' 上关于对偶 $\langle X, X'\rangle$ 的可允许拓扑。很明显，X' 上的 T_{ω} 拓扑和 X 中的拓扑 T 有关。如果在 X 上取 $T=\sigma(X, X')$，那末相应的，在 X' 上的 T_{ω} 拓扑可记作

$\sigma(X, X')_{e_0}$。

引理 1 设 (X, T) 是局部凸空间，$\{f_\nu\}$ 是 X' 中关于 T_{e_0} 拓扑的基本定向点列，则 $f_\nu(x)$ 必点点收敛到 $f(x)\in X^*$，并且线性泛函 $f(x)$ 关于拓扑 T 是序列连续的。

证 因为 f_ν 是 (X', T_{e_0}) 中的基本定向点列，由于 $\sigma(X', X)\subset T_{e_0}$，所以对任一 $x\in X$，$f_\nu(x)$ 是基本定向数列，必定收敛，令

$$f(x)=\lim f_\nu(x),\ x\in X.$$

容易验证，$f\in X^*$。下面证明 $f(x)$ 在 (X, T) 上是序列连续的。设 $\{x_n\}$ 是 (X, T) 中的 0 序列。记为 $N=\{x_n\}$. 对任给的 $\varepsilon>0$，$\frac{1}{2}\varepsilon N^0\in\mathcal{N}(T_{e_0})$。由假设 f_ν 是基本的，必存在 ν_0，使得当

$$\nu\geqslant\nu_0\Rightarrow f_\nu-f_{\nu_0}\in\frac{1}{2}\varepsilon N^0.$$

由于 $f_{\nu_0}(x)$ 是 X 上的连续线性泛函，以及 $x_n\to 0$，必存在充分大的自然数 K，使得当 $n>K$ 时，$|f_{\nu_0}(x_n)|<\frac{\varepsilon}{2}$。则当 $n>K$ 时，

$$\begin{aligned}|f(x_n)|&\leqslant|f(x_n)-f_{\nu_0}(x_n)|+|f_{\nu_0}(x_n)|\\&=\lim|f_\nu(x_n)-f_{\nu_0}(x_n)|+|f_{\nu_0}(x_n)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $f(x)$ 在 0 点序列连续，从而序列连续。证毕。

定义 设 (X, T) 是局部凸空间，如果在其上每个序列连续的线性泛函是连续的，则称 (X, T) 为 Mazur 空间。

例 1 囿空间必是 Mazur 空间。

例 2 设 X 是不完备的线性赋范空间，并且是桶式空间，那末 $(X', \sigma(X', X))$ 不是 Mazur 空间。这一点可以由下述定理 1 的推论直接得知。事实上，如果 $(X', \sigma(X', X))$ 是 Mazur 空间，则 $(X, \beta(X, X'))$ 应为完备的。但因 X 是桶式空间，$\beta(X, X')$ 和 X 上的拓扑一致，故知 X 是完备的，这和假设相矛盾。

定理 1 设 (X, T) 是 Mazur 空间，则 (X', T_{e_0}) 是完备的。

证 根据引理 1，(X', T_{e_0}) 中的每一个基本定向点列 f_ν 必点

点收敛到 $f\in X^*$，且 f 是 (X, T) 上序列连续的。由假定 (X, T) 是 Mazur 空间，故 $f\in X'$。考虑对偶空间 $\langle X, X'\rangle$，则 $f_n\xrightarrow{\sigma(X', X)}f$。因为 T_{c_0} 是 X' 上比 $\sigma(X', X)$ 更强的可允许拓扑，由 §4 中的定理 4，f_n 一定按 T_{c_0} 拓扑收敛于 f。即 (X', T_{c_0}) 是完备的。证毕。

推论 设 X 是 Mazur 空间，则 X' 关于强拓扑 $\beta(X', X)$ 是完备的。

证 因为强拓扑 $\beta(X', X)$ 是比 T_{c_0} 更强的可允许拓扑。

此推论可以看作是下述事实的推广："赋范空间的共轭空间是完备的"。事实上，赋范空间是囿空间，其共轭空间 X' 上的范数拓扑即是强拓扑 $\beta(X', X)$。

定理 2 设 (X, T) 是具有凸紧性的 Mazur 空间，则 X' 上的 T_{c_0} 拓扑关于自然对偶 $\langle X, X'\rangle$ 是相容的，且是完备的。

证 设 A 是 X 中的 0 序列，则 $A\cup\{0\}$ 是 X 中的紧集。由于 T 具有凸紧性，A 的均衡凸闭包 $A^{00}=(A\cup\{0\})^{00}$ 是 X 中的紧集，从而也是弱紧的。由 §5 中的定理 1 的推论，即知 T_{c_0} 是 X' 上的相容拓扑。证毕。

系 设 X 是 Frechet 空间，则 (X', T_{c_0}) 是完备的。并且 X' 上的 T_{c_0} 拓扑关于对偶 $\langle X, X'\rangle$ 是相容拓扑。

最后，我们把 X' 上的 T_{c_0}，T_k 拓扑的概念推广到一般对偶空间的情形。

设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，T 是 X 上的可允许拓扑。设 $\mathscr{A}$ 是 X 中的关于拓扑 T 收敛于 0 的序列全体，则 Y 上相应的一致收敛拓扑 $T_{\mathscr{A}}$ 称为 T_{c_0} 拓扑。同样 Y 上关于 (X, T) 紧集上的一致收敛拓扑称为 T_k 拓扑。

由于 T 是可允许拓扑，所以 $Y\subset(X, T)'$。记 $X'=(X, T)'$，则 (Y, T_{c_0}) 和 (Y, T_k) 分别是 (X', T_{c_0}) 和 (X', T_k) 在 Y 上的限制。

三、完全有界集上的一致收敛拓扑 T^0

设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，T 是 X 上的可允许拓扑，$\mathscr{A}$ 是 (X, T) 中的完全有界集全体，则 Y 中相应的一致收敛拓扑 $T_{\mathscr{A}}$ 称为完全有界集上一致收敛拓扑，记为 T^0。

同 T_{c_0} 与 T_k 一样，T^0 拓扑和 X 上可允许拓扑 T 有关。如果 X 是局部凸空间，考虑自然对偶 $\langle X, X'\rangle$，则 X' 上的 T^0 拓扑通常也记作 T_c，这相当于 T 是相容拓扑的情形。

例 3 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，在 X 上取 $T=\sigma(X, Y)$。则由于关于 $\sigma(X, Y)$ 拓扑，完全有界集和有界集是一致的，所以在 Y 上 $T^0=[\sigma(X, Y)]^0=\beta(Y, X)$。

很明显，T^0 拓扑是 Y 上关于 $\langle X, Y\rangle$ 的可允许拓扑。

定理 3 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，T 是 X 上可允许拓扑，则 $\sigma(Y, X)\subset T_{c_0}\subset T_k\subset T^0\subset\beta(Y, X)$。

证 可由定义可直接得知。

定理 4 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，T 是 X 上可允许拓扑，并且 (X, T) 是有界完备的，则在 Y 上 T^0 拓扑关于 $\langle X, Y\rangle$ 是相容的。

证 设 A 是 (X, T) 中的完全有界集，令 B 是 A 的均衡凸闭包，则 B 也是完全有界集。由于 (X, T) 是有界完备的，所以 B 是完备子集。根据第一章 §10，B 是 (X, T) 中的紧集。由于 $\sigma(X, Y)\subset T$，B 也是 $\sigma(X, Y)$ 紧的，所以 $B^0\in\mathcal{N}(\tau(Y, X))$。因为 $A\subset B$，$B^0\subset A^0$，所以 $A^0\in\mathcal{N}(\tau(Y, X))$，即证明了 $T^0\subset\tau(Y, X)$。同时，明显地有 $\sigma(Y, X)\subset T^0$，由 Mackey-Arens 定理知 T^0 是 Y 上的相容拓扑。证毕。

系 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间。在 X 上取 $T=\sigma(X, Y)$。如果 $(X, \sigma(X, Y))$ 是有界完备的，则 $T^0=[\sigma(X, Y)]^0=\beta(Y, X)$ 是相容拓扑。

定理 5 设 (X, T) 是 Mazur 空间（特别是，X 是囿空间或线性距离空间），则 X' 关于 T_c 拓扑是完备的。

证 根据定理 1，(X', T_{c_0}) 是完备的。因为 $T_{c_0}\subset T^0=T_C$，T_C 是 X' 上比 T_{c_0} 强的可允许拓扑。由 §4 中的定理 4，(X', T_C) 是完备的。证毕。

系 如果 (X, T) 是 Mazur 空间，并且是有界完备的（例如 (F) 空间），则 X' 关于 $\tau(X', X)$ 是完备的。

下面先给出一个引理：

引理2 设T是局部凸空间X到局部凸空间Y中的线性映照，A是X中的均衡凸集。如果T在A上的限制$T|_A$在0点连续，则$T|_A$在A上一致连续。

证 设V是Y中任一0的环境，我们希望能找到$U\in\mathcal{N}(X)$，使得当

$$x、y\in A，且\ x-y\in U\Rightarrow Tx-Ty\in V.$$

但是因为A是均衡凸集$x-y\in A-A=2A$，所以只要能有$T(2A\cap U)\subset V$，即$T\left(A\cap\frac{U}{2}\right)\subset\frac{V}{2}$。由假定$T|_A$在0点连续，所以这样的$U$是存在的。证毕。

定理6 设(X,T)是局部凸空间，$E\subset(X,T)'$是(X,T)上的任一等度连续集合．则在E上，下述三个一致收敛拓扑是等价的。

(a) 在完全有界集上的一致收敛拓扑T_C；

(b) 弱*拓扑$\sigma(X',X)$；

(c) 在X中全的子集D上的点点收敛拓扑$\sigma(X',D)$。

证 (a)⇒(b)⇒(c)是明显的，只要证(c)⇒(a)。

由E是等度连续集合，必存在$V\in\mathcal{N}(T)$，使得

$$E\subset V^0. \tag{5}$$

不失一般性，不妨设$E=V^0$。又由于D是X中全的子集。根据§2中的定理2，D的线性包在X中关于$\sigma(X,X')$拓扑是稠密的。由于当用D的线性包代替D时，拓扑$\sigma(X',D)$是一样的，所以不妨设D是X中的稠密线性子空间．我们只要证明恒等映照

$$I:\ (X',\sigma(X',D))\to(X',T_C)$$

在E上是一致连续的。由引理2，只要证明$I|_E$在0点连续即可。设定向点列$f_\alpha\in E$按拓扑$\sigma(X',D)$，$f_\alpha\to0$，即对每一个$x\in D$，有

$$\lim\langle x,f_\alpha\rangle=0.$$

下面证明f_α在X中每一个完全有界集A上必一致收敛到0。事实上，对于任一个正数ε，存在D中有限个元$x_1,\cdots,x_n$，使

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{n}\left\{x_i+\frac{\varepsilon}{2}V\right\}.$$

取 ν_0 充分大，使得当 $\nu\geqslant\nu_0$ 时，对 $i=1, 2, \cdots, n$, 均有

$$|\langle x_i, f_\nu\rangle|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

对于任一 $x\in A$, 必能找到某个 x_{i_0}, 使 $x\in x_{i_0}+\frac{\varepsilon}{2}V$。所以当 $\nu\geqslant\nu_0$ 时，有

$$|\langle x, f_\nu\rangle|\leqslant|\langle x_{i_0}, f_\nu\rangle|+|\langle x-x_{i_0}, f_\nu\rangle|$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这就证明了 $f_\nu(x)$ 在 A 上一致收敛到 0, 由此 f_ν 按拓扑 T_C 收敛到 0, 即 $I|_E$ 在 0 点连续。证毕。

系 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，T 是 X 上的可允许拓扑。$E\subset Y$ 是 (X, T) 上任一等度连续集合，则在 E 上 $\sigma(Y, X)$, T_{σ_1}, T_K, T^0 诸拓扑都是相等的。

证 由于 T 是 X 上的可允许拓扑，$Y\subset(X, T)'$。所以 (Y, T^0) 是 (X', T_C) 在 Y 上的限制。由定理 6 即得。证毕。

例 4 设 (X, T) 是无限维 Banach 空间，则在共轭空间 X' 中，每一个球 $V_r=\{f\,|\,\|f\|\leqslant r\}$ 是 X 上的等度连续集合。根据定理 6, 在 V_r 上 $\sigma(X', X)=T^0$。但是在全空间 X' 中，$\sigma(X', X)\neq T^0$。事实上，可以选取 $N=\{x_n\}$ 是 X 中收敛于 0 的序列，并且 N 是无限维的。则 $U=N^0\in\mathscr{N}(T^0)$, 但是 $U\overline{\in}\mathscr{N}(\sigma(X', X))$。因为否则，将有有限个点的集合 F, 使得 $F^0\subset U=N^0$, 由此 $N\subset N^{00}\subset F^{00}$, 而 F^{00} 是有限维中的集合，这和 N 的选取相矛盾。

引理 3 设 T、T_1 是线性空间 X 上的两个局部凸向量拓扑，B 是 X 中的均衡凸集，并且 $T|_B=T_1|_B$。如果 B 是 T 完全有界集，则 B 必是 T_1 完全有界集。

证 设 U 是 X 中 0 的 T_1 拓扑环境，由于 $T|_B=T_1|_B$。取 $V\in\mathscr{N}(\tau)$, 使

$$V\cap B\subset U\cap B. \tag{6}$$

由假定 B 是 T 完全有界集，所以 $\frac{1}{2}B$ 也是完全有界集，必存在有

限点集 $F\subset\frac{1}{2}B$，使

$$\frac{1}{2}B\subset F+V \tag{7}$$

对每个 $b\in B$，必存在 $f\in F$，$v\in V$，使 $\frac{1}{2}b=f+v$，则 $v=\frac{1}{2}b-f\in \frac{1}{2}B-\frac{1}{2}B=B$。所以

$$\frac{1}{2}B\subset F+V\cap B\subset F+U. \tag{8}$$

这就是说，B 是 T_1 完全有界集。

定理 7 设 T 是 X 上关于对偶 $\langle X, Y\rangle$ 的可允许拓扑，则 $T^{00}\supset T$。

证 这里 $T^{00}=(T^0)^0$，设 U 是 0 的任一 T 拓扑环境。由假定 T 是 X 上的可允许拓扑，不妨设 $U=B^0$，其中 B 是 Y 中的均衡凸 $\sigma(Y, X)$ 有界 $\sigma(Y, X)$ 闭子集。根据弱拓扑 $\sigma(Y, X)$ 的性质，B 也是 $\sigma(Y, X)$ 完全有界集。由于 $B=B^{00}=U^0$，B 是 Y 中关于拓扑 T 的等度连续集合。则由定理 6，在等度连续集合 B 上 T^0 拓扑和弱拓扑 $\sigma(Y, X)$ 是一致的。又由引理 3，即知 U^0 关于拓扑 T^0 也是完全有界集。因此 $U=U^{00}=(U^0)^0\in\mathscr{N}(T^{00})$，$T\subset T^{00}$。证毕。

注 如果 T 是 X 上的相容拓扑，则由 Alaoglu-Bourbaki 定理知 U^0 是 $\sigma(Y, X)$ 紧的。又因 U^0 是 Y 中关于 (X, T) 的等度连续集合，由定理 6 的系：U^0 是 T^0 拓扑紧的，所以

$$U=U^{00}=(U^0)^0\in\mathscr{N}((T^0)_K).$$

从而可以得到更强的结果 $T\subset(T^0)_K$。

定理 8(Grothendieck interchange theorem) 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 分别是 X 和 Y 中的可允许饱和集族，则下述条件是等价的：

(a) 对每一个 $A\in\mathscr{A}$ 是 $T_{\mathscr{B}}$ 完全有界的；

(b) 对每一个 $B\in\mathscr{B}$ 是 $T_{\mathscr{A}}$ 完全有界的；

(c) 在每一个 $A\in\mathscr{A}$ 上，$T_{\mathscr{B}}$ 和 $\sigma(X, Y)$ 是一致的；

(d) 在每一个 $B\in\mathscr{B}$ 上，$T_{\mathscr{A}}$ 和 $\sigma(Y, X)$ 是一致的。

证　(a)⇒(d)：设 $B\in\mathscr{B}$，则 B 是 $(X, T_{\mathscr{B}})$ 上的等度连续集合。由定理 6 的系，在等度连续集合 B 上，$\sigma(Y,X)$ 拓扑和 $(T_{\mathscr{B}})^0$ 拓扑是一致的。假定(a)满足，对每一个 $A\in\mathscr{A}$ 是 $T_{\mathscr{B}}$ 完全有界的，所以 $T_{\mathscr{A}}\subset(T_{\mathscr{B}})^0$。由 $T_{\mathscr{A}}$ 是 Y 上的可允许拓扑，得到

$$\sigma(Y, X)\subset T_{\mathscr{A}}\subset(T_{\mathscr{B}})^0. \tag{9}$$

所以在 B 上，$T_{\mathscr{A}}$ 拓扑也和 $\sigma(Y, X)$ 拓扑相一致。

(d)⇒(b)：设 $B\in\mathscr{B}$，B 是 Y 中 $\sigma(Y, X)$ 有界集。由于 $\sigma(Y, X)$ 有界集必是 $\sigma(Y, X)$ 完全有界的，故 B 是 $\sigma(Y, X)$ 完全有界集。根据 (d)，在 B 上 $T_{\mathscr{A}}$ 拓扑和 $\sigma(Y, X)$ 拓扑相一致。因为 $\mathscr{B}$ 是 Y 中的饱和集族，所以不妨假设 B 是均衡凸的，由引理 3 即知 B 关于 $T_{\mathscr{A}}$ 拓扑也是完全有界集。

对称地，可以证明(b)⇒(c)，(c)⇒(a)，从而(a)、(b)、(c)、(d)是等价的。证毕。

设 (X, T) 是局部凸空间，考虑自然对偶 $\langle X, X'\rangle$，则 T 是 X 上的可允许拓扑，而 $\beta(X', X)$ 是 X' 上的可允许拓扑。它们相应的可允许集族分别为 X' 中关于 (X, T) 的等度连续集合 $\mathscr{B}$ 和 (X, T) 中有界集全体 $\mathscr{A}$，于是有下述系：

系　设 (X, T) 是局部凸空间，则下述条件是等价的：

(a) X 中的每一个有界集是完全有界的；

(b) X' 中的每个等度连续集合 $B\in\mathscr{B}$ 关于 $\beta(X', X)$ 是完全有界的；

(c) 在每个有界集 $A\in\mathscr{A}$ 上，拓扑 T 和 $\sigma(X, X')$ 是一致的；

(d) 在 X' 中的每个等度连续集合 $B\in\mathscr{B}$ 上，$\beta(X', X)$ 和 $\sigma(X', X)$ 是一致的。

定理 9　设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，T 是 X 上的可允许拓扑，则 T^0 是 Y 上的满足下列条件的最强可允许拓扑，使得在 Y 中的每一个 T 等度连续集合上的限制和弱拓扑 $\sigma(Y, X)$ 相一致。

证　不妨设 X 上的可允许拓扑 T 是由 Y 中可允许集族 $\mathscr{B}$ 决定的，$T=T_{\mathscr{B}}$。则对每个 $B\in\mathscr{B}$，是 (X, T) 上的等度连续集合。如果 $T_{\mathscr{A}}$ 是 Y 上的可允许拓扑，$\mathscr{A}$ 是 X 上的可允许集族。$T_{\mathscr{A}}$ 具有

这样的性质，使得在Y中的每一个等度连续集合上的限制和$\sigma(Y, X)$相一致，即知对每个$B\in\mathscr{B}$，有

$$T_{\mathscr{A}}|_B=\sigma(Y, X)|_B. \tag{10}$$

由定理8，$(d)\Longleftrightarrow(a)$，对每一个$A\in\mathscr{A}$是拓扑$T=T_{\mathscr{B}}$的完全有界集，所以$T_{\mathscr{A}}\subset T^0$。由定理6的系，即知$T^0$是满足所述条件的最强可允许拓扑。证毕。

定理 10 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，T是X上的可允许拓扑，则$T^{00}\supset T$，T^{00}和T有相同的完全有界集、紧集和收敛序列。并且T^{00}是和T有相同完全有界集的最强可允许拓扑。

证 (1) 设A是X中的T完全有界集，则A是X中T^0等度连续集合。由于T^{00}等度连续集合是T^0完全有界集，由定理8知，T^0等度连续集合也一定是T^{00}完全有界集，所以T完全有界集类$\subset$ T^{00}完全有界集类。另一方面，由定理7，$T\subset T^{00}$。所以T^{00}完全有界集类$\subset T$完全有界集类，所以T和T^{00}有相同的完全有界集。

(2) 设T_1是X上的可允许拓扑，并且T_1和T有相同的完全有界集，则T^0等度连续集类$=T$完全有界集类$=T_1$完全有界集类。由定理8，$(a)\Longleftrightarrow(b)$，$T_1$等度连续集合必是$T^0$完全有界集。所以$T_1\subset(T^0)^0=T^{00}$，即$T^{00}$是和$T$有相同的完全有界集的最强可允许拓扑。

(3) 设K是T紧集，则K是T完全有界集，并且关于T是完备的。由上述证明(2)知，K也是T^{00}完全有界集，同时由于T和T^{00}都是X上的可允许拓扑，并且$T\subset T^{00}$。由§4中的定理4，K关于T^{00}是完备的。所以K是T^{00}紧集。同样，由$T\subset T^{00}$知，T和T^{00}有相同的紧集。

(4) 设$\{x_n\}$是X中的T收敛序列，$x_n\xrightarrow{T}x_0\ (n\to\infty)$。令$N=\{x_n\}\cup\{x_0\}$，从而$N$是紧集，由上述(3)知，$N$也是$T^{00}$紧集。由$T\subset T^{00}$知，必有$T|_N\subset T^{00}|_N$，由于$T|_N$是分离的，所以$T|_N=T^{00}|_N$，因此$x_n$关于$T^{00}$也是收敛序列。反过来，由$T\subset T^{00}$，即知$T$、$T^{00}$有相同的收敛序列。

由(1)、(2)、(3)、(4)即得定理的证明。

四、aw^* 拓扑和 Banach-Dieudonne 定理

设(X, T)是局部凸空间。根据定理 9，我们知道 X' 上的 T^0 拓扑是满足下述条件的最强可允许拓扑，使得在 X' 中的每个等度连续集合上的限制和 $\sigma(X', X)$相一致。下面我们除去可允许拓扑这个条件，而构造满足上述条件的最强拓扑。

定义　设(X, T)是局部凸空间，S 是 X' 中的子集。如果对于每一个 $U\in\mathcal{N}(X)$，$S\cap U^0$ 是 $\sigma(X', X)$紧的，则称 S 为 aw^* 闭的。

(IV) S 是 aw^* 闭的充要条件为：对于每一个等度连续集合 $E\subset X'$，$S\cap E$ 是 E 中的 $\sigma(X', X)$闭集。

证　必要性：设 S 是 aw^* 闭的。E 是 X' 中的任一等度连续集合，则 $U=E^0\in\mathcal{N}(X)$，$S\cap U^0$ 是 $\sigma(X', X)$闭的。由

$$S\cap E=S\cap(E\cap U^0)=(S\cap U^0)\cap E, \tag{11}$$

即知 $S\cap E$ 是 E 中的 $\sigma(X', X)$闭集。

充分性：对每个 $U\in\mathcal{N}(X)$，U^0 是等度连续集合，所以 $S\cap U^0$ 是 U^0 中的 $\sigma(X', X)$ 闭集。由 Alaoglu-Bourbaki 定理，U^0 是 $\sigma(X', X)$紧集，所以 $S\cap U^0$ 是 X' 中的 $\sigma(X',X)$紧子集。证毕。

容易知道，$\sigma(X', X)$ 闭集一定是 aw^* 闭集。设 X' 中的 aw^* 闭集全体为 $\mathscr{U}$，则 $\mathscr{U}$ 对集合的有限併和任意个集的交运算是封闭的。由此，在 X' 上可以构造一个拓扑，使得 $\mathscr{U}$ 是它的闭集全体，称为 aw^* 拓扑。由具体构造，我们知道，X' 上的 aw^* 拓扑是满足下述条件的最强拓扑，使得在每个等度连续集合 $E\subset X'$ 上的限制和 $\sigma(X', X)$相一致。当然，X' 上的 aw^* 拓扑一般可以不是向量拓扑。

(V) aw^* 闭集经平移后仍是 aw^* 闭集。

证　设 S 是 X' 中的 aw^* 闭集，$a\in X'$。要证明 $S+a$ 也是 aw^* 闭的。设 $E\subset X'$ 是等度连续集合，定向点列 $y_\tau\in(S+a)\cap E$，并且按弱*拓扑 $\sigma(X', X)$，$y_\tau\to y\in E$。则

$$y_\tau-a\xrightarrow{\sigma^*}y-a\in E-a.$$

因为 $E-a$ 也是等度连续集合，S 是 aw^* 闭的，$S\cap(E-a)$是$(E-a)$中的 $\sigma(X', X)$闭集。由于 $y_\tau-a\in S\cap(E-a)$，所以 $y-a\in S$，

由此得到 $y\in S+a$，这就证明了 $(S+a)\cap E$ 是 E 中的 $\sigma(X', X)$ 闭集.证毕.

对于局部凸距离空间 X，X' 上的 aw^* 拓扑即是 X' 上的局部凸向量拓扑 T^0. 同时也给出了 aw^* 拓扑是向量拓扑的一个充分条件，下述定理称为 Banach-Dieudonné 定理：

定理 11 设 (X, T) 是局部凸距离空间，则在 X' 上，下述诸拓扑都是相等的：T_{c_0}，T_K，T^0 和 aw^*.

由此，如果 X 是局部凸距离空间，则 X' 上 T^0 拓扑是满足下述条件的最强拓扑，使得在 X' 中每个等度连续集合上的限制和弱*拓扑 $\sigma(X', X)$ 相一致.

证 考虑自然对偶 $\langle X, X'\rangle$，X' 中的拓扑 T_{c_0}、T_k、T^0 分别是在 X 中 0 序列、紧集、完全有界集上的一致收敛拓扑，且有

$$T_{c_0}\subset T_k\subset T^0\subset aw^*. \tag{12}$$

所以只要证明，如果 S 是 aw^* 闭集，则 S 必是 T_{c_0} 闭的即可. 由性质(V)，aw^* 闭集经平移后仍是 aw^* 闭的，所以不妨假设 $o\overline{\in}S$. 我们证明存在 $U\in\mathcal{N}(T_{c_0})$，使得

$$S\cap U=\emptyset. \tag{13}$$

由此，只要对 S 作适当的平移，容易知道 S 是 T_{c_0} 闭的.

设 $\{U_n\}$ 是 $\mathcal{N}(X)$ 中的一组基. 因为 S 是 aw^* 闭的，$S\cap U_1^0$ 是 σ^* 闭的，所以存在有限点集 $F_1\subset X$，使得

$$F_1^0\cap(S\cap U_1^0)=\emptyset. \tag{14}$$

考虑无限个集合 U_2^0、$S\cap U_1^0$、F_1^0 以及 $\{x^0,\ x\in U_1\}$，它们的交集为

$$U_2^0\cap S\cap F_1^0\cap U_1^0\subset S\cap F_1^0\cap U_1^0=\emptyset. \tag{15}$$

但是因为 U_2^0 是 σ^* 紧集. 根据(15)，必须存在有限个子集，其交为空的，即存在有限点集 $F_2\subset U_1$，使得

$$U_2^0\cap S\cap(F_1\cup F_2)^0=U_2^0\cap S\cap F_1^0\cap F_2^0=\emptyset. \tag{16}$$

因为放大 F_2 不会影响(16)式成立，所以不妨假定 $F_2\neq\emptyset$. 类似地存在有限点集 $F_3\subset U_2$，使得 $U_3^0\cap S\cap(F_1\cup F_2\cup F_3)^0=\emptyset$. 一般地存在有限点集 $F_n\subset U_{n+1}$，使得

$$U_n^0\cap S\cap A_n^0=\emptyset\quad(n=1,\ 2,\ \cdots), \tag{17}$$

其中 $A_n=\cup\{F_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$。现在令 $N=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，则 N 是 X 中的 0 序列，所以 $N^0\in\mathscr{N}(T_{c0})$。由于 $S\cap N^0\subset S\cap A_n^0$，可知 $S\cap N^0\cap U_n^0=\varnothing$。但是 $X'=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n^0$，所以 $S\cap N^0=\varnothing$，在(13)中只要取 $U=N^0$ 即可。证毕。

下述推论是有用的：

推论 1　设 X 是局部凸距离空间，则 X 中的点集 B 是完全有界的充要条件为 B 包含在某收敛于 0 的序列的均衡凸闭包中。

证　由于 $B^0\in\mathscr{N}(T^0)$ 及 $T^0=T_{c0}$，必存在 X 中 0 序列 N，使得 $N^0\subset B^0$，则 $B\subset B^{00}\subset N^{00}$。证毕。

定理 12(Krein-Smulian)　设 X 是局部凸 Frechet 空间，则 X' 中的每一个 aw^* 闭的凸集是 σ^* 闭的。

证　根据定理 11，X' 上的每个 aw^* 闭凸集 S 必是 T^c 闭的。由于 X 是完备的，根据定理 4，T^0 关于对偶 $\langle X, X'\rangle$ 是相容拓扑。由 §1 中的定理 5，S 必是 σ^* 闭集。证毕。

定理 13(Banach-Dieudonné)　设 X 是 Banach 空间，$D=\{f\in X', \|f\|\leqslant1\}$，$S$ 是 X' 的线性子空间，如果 $S\cap D$ 是 σ^* 闭的，则子空间 S 必是 σ^* 闭的。

证　对于 $a>0$，容易知道 $S\cap\{f|\|f\|\leqslant a\}=a(S\cap D)$，所以定理中的条件包含 S 是 aw^* 闭的，由定理 12 即得。证毕。

由于局部凸 Frechet 空间是桶式空间，X' 中的 $\sigma(X',X)$ 有界集和等度连续集合是一致的，故有：

定理 14　设 X 是局部凸 Frechet 空间，则 X' 中凸子集 M 是 σ^* 闭的充要条件为对于 X' 中的每个 σ^* 有界 σ^* 闭子集 B，$M\cap B$ 是 σ^* 闭的。

如果 X 是可分的局部凸 Frechet 空间，则 X' 中的每一个 σ^* 有界子集关于 σ^* 拓扑是可距离化的。由定理 14 得到：

定理 15　设 X 是可分的局部凸 Frechet 空间，则 X' 中的凸子集 M 是 σ^* 闭的充要条件为 M 是 σ^* 序列闭的。

§7 自完备集和 Banach-Mackey 定理

根据 Mackey 定理，我们已经知道，局部凸空间(X, T)中的有界集和弱有界集是一致的。在对偶空间$\langle X, Y\rangle$的情形，如果在X上取相容拓扑T，因为$(X, T)'=Y$，$\sigma(X, Y)=\sigma(X, X')$，所以仍可化为上述情形，得知$X$中的每个$\sigma(X, Y)$有界集必是$T$有界集，从而对于$X$上的每个相容拓扑$T$有相同的有界集。但是仅仅考虑相容拓扑是不够的，例如$\beta(X, Y)$就不一定是相容拓扑。一般来说，设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，T是X上的可允许拓扑。记$X'=(X, T)'$，则X中的$\sigma(X, X')$有界集必是T有界的。由于$Y\subset X'$，$\sigma(X, Y)\subset\sigma(X, X')$，所以我们一般不能由$\sigma(X, Y)$有界性推得$T$有界性。

下面的讨论，对于对偶空间的可允许拓扑给出一个弱有界集是有界集的条件。同时指出，一个局部凸空间X在什么时候在X上关于对偶$\langle X, X'\rangle$的所有可允许拓扑有相同的有界集。

设X是线性空间，A是X中的均衡凸集，根据A张成线性子空间$Y=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nA$，则在线性子空间$Y$中，集$A$是均衡凸吸收的。作$Y$中集$A$的 Minkowski 泛函：

$$\|x\|_A=\inf\{\lambda>0,\ x\in\lambda A\},\ x\in Y.$$

则$\|\cdot\|_A$是Y上的拟范数。令$N=\{x|\ \|x\|_A=0\}$是Y的线性子空间，作商空间$X_A=Y/N$，则$\|x\|_A$仅依赖于x在商空间中相应的等价类$\hat{x}$，在X_A上定义范数$\|\hat{x}\|_A=\|x\|_A$，成为一个赋范空间。

设X是局部凸空间，A是X中的均衡凸有界子集，则$\|x\|_A$是一个范数，即有$X_A=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} nA$。事实上，如$x\in Y$，$x\neq 0$，必存在0的环境$V$，使$x\overline{\in} V$。又因$A$是有界集，存在$\lambda_0$，使当$|\lambda|<\lambda_0$时，$\lambda A\subset V$，所以$x\overline{\in}\lambda A$。推得$\|x\|_A>0$，$\|\cdot\|_A$是一个范数。如果进一步假设$A$是闭的，则$A$为赋范空间$X_A$的单位球。

定义　设X是局部凸空间，A是X中均衡凸闭有界集，如果上

述 X_A 是一个 Banach 空间，则称 A 是自完备集(Banach dish)。

设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，A 是 X 中均衡凸弱有界子集，则 $X_A = \bigcup_{i=1}^{\infty} nA$，$X_A$ 上由 $\|\cdot\|_A$ 决定的拓扑强于 $\sigma(X, Y)$ 在 X_A 上的导出拓扑。

事实上，取 X 中 0 的任一弱拓扑环境

$$W = \{x \mid |f_i(x)| < \varepsilon, \quad i = 1, \cdots, n\},$$

其中 $f_i \in Y$。由于 A 是弱有界集，$\sup\limits_{x\in A}|f_i(x)| = M_{f_i} < \infty$，令 $M = \max M_i$，则当 $\lambda < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ 时，$\lambda A \subset W$，所以

$$\{x \in X_A \mid \|x\|_A < \lambda\} \subset \lambda A \subset W \cap X_A.$$

这就是说 $\|\cdot\|_A$ 范数拓扑 $\supset \sigma(X, Y)|_{X_A}$。

(I) 设 (X, T) 是局部凸空间，A 是 X 中的均衡凸闭有界集，并且序列完备，则 A 是自完备集。

证 由条件 $X_A = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA \subset X$，由于有界集 A 被 (X, T) 中的每个 0 的环境吸收，所以 X_A 上的范数 $\|\cdot\|_A$ 拓扑强于 T 在 X_A 上的导出拓扑。并且 $A = \{x \mid \|x\|_A \leqslant 1\}$ 是 (X, T) 中的闭集，由假设，A 是序列完备的，则根据第二章 §1 中的定理 2，A 关于 $\|\cdot\|_A$ 范数拓扑也是序列完备的。即可推得 $(X_A, \|\cdot\|_A)$ 是一个 Banach 空间。证毕。

由此得到：

(II) 如果局部凸空间 (X, T) 是序列完备的，则 X 中的每个均衡凸闭有界子集是自完备集。

定理 1 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$\mathscr{B}$ 是 Y 中均衡凸弱有界子集族，并且 $\mathscr{B}$ 中的集全体在 Y 中张成弱稠密线性子空间，于是

(a) X 中每一个自完备的均衡凸 $\sigma(X, Y)$ 闭、$\sigma(X, Y)$ 有界子集 A 关于 $T_{\mathscr{B}}$ 拓扑是有界集。

(b) 如果每一个 $B \in \mathscr{B}$ 是自完备集，则 X 中的每一个 $\sigma(X, Y)$ 有界集 A 关于 $T_{\mathscr{B}}$ 拓扑有界。

证 (a) X 上的一致收敛拓扑 $T_{\mathscr{B}}$ 由拟范数族 $\{p^B(x), B \in \mathscr{B}\}$

决定，其中 $p^B(x)=\sup\limits_{y\in B}|\langle x, y\rangle|$。由于 $\mathscr{B}$ 中的集的全体在 Y 中张成 $\sigma(Y, X)$ 稠密子空间，所以 $T_{\mathscr{B}}$ 是分离的。由假设，A 是 X 中自完备均衡凸弱闭弱有界集，$(X_A, \|\cdot\|_A)$ 是 Banach 空间。为了证明 A 是 $T_{\mathscr{B}}$ 有界，只要证明对于每个 $B\in\mathscr{B}$，$p^B(A)<\infty$ 即可。

事实上，对于 $y\in Y$，$\hat{y}(x)=\langle x, y\rangle$ 是 $(X, \sigma(X, Y))$ 上的连续线性泛函，因此把 $\hat{y}$ 限制在 $(X_A, \sigma(X, Y)|_{X_A})$ 上也是连续的。由于在 X_A 上 $\|\cdot\|_A$ 范数拓扑强于 $\sigma(X, Y)|_{X_A}$，所以 $\hat{y}\in(X_A, \|\cdot\|_A)'$。对于每一个 $B\in\mathscr{B}$，$\hat{B}=\{\hat{y}, y\in B\}$ 是 Banach 空间 $(X_A, \|\cdot\|_A)$ 上的一族连续线性泛函，即 $\hat{B}\subset(X_A, \|\cdot\|_A)'$。因为 B 是 $\sigma(Y, X)$ 有界集，对于 $x\in X_A$，有

$$\sup_{y\in B}|\hat{y}(x)|=\sup_{y\in B}|\langle x, y\rangle|<\infty.$$

所以 $\hat{B}$ 是 $(X_A, \|\cdot\|_A)$ 中弱*有界集。根据共鸣定理，$\hat{B}$ 是强有界的，

$$\sup_{y\in B}\sup_{\|x\|_A\leq 1}|\langle x, y\rangle|<\infty.$$

由此 $\sup\limits_{x\in A}p^B(x)=\sup\limits_{y\in B}\sup\limits_{\|x\|_A\leq 1}|\langle x, y\rangle|<\infty$。证毕。

(b) 类似地，如果每个 $B\in\mathscr{B}$ 是自完备集，则 $(Y_B, \|\cdot\|_B)$ 是 Banach 空间。因为 A 是 X 中的 $\sigma(X, Y)$ 有界集，所以对每个 $y\in Y_B$，$\sup\limits_{x\in A}|\langle x, y\rangle|<\infty$，由共鸣定理推得

$$\sup_{x\in A}p^B(x)=\sup_{x\in A}\sup_{\|y\|_B\leq 1}|\langle x, y\rangle|<\infty,$$

即知 A 关于 $T_{\mathscr{B}}$ 是有界的。证毕。

推论 1 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，则 Y 中的每一个自完备的均衡凸弱有界弱闭集 A 是强有界集（即 $\beta(Y, X)$ 拓扑有界集）。

推论 2 设 (X, T) 是局部凸空间，X' 是共轭空间，则 X' 中的每一个均衡凸弱*紧子集是强有界的。

证 考虑自然对偶 $\langle X, X'\rangle$，因为 X' 中每一个均衡凸弱*紧子集必定是 $\sigma(X', X)$ 完备的。根据性质 (I)，一定是自完备集。

推论 3 设 (X, T) 是局部凸空间，并且 X 中的每一个有界集一定包含在某自完备的均衡凸闭有界集中（这样的局部凸空间称

为局部完备的)，则 X' 中的每一个弱*有界集必强有界。

设 X 是局部凸空间，X' 是共轭空间。考虑 X' 中由凸子集组成的集类，分别以 $\mathscr{E}(\mathscr{C},\mathscr{S},\mathscr{W})$ 表示 X' 中的等度连续(相对弱*紧，强有界，弱*有界)均衡凸子集全体。如果 X 是 Banach 空间，则这些集类是相同的。对于一般的局部凸空间，由 Alaoglu 定理以及推论 2 可知道，一定有下述包含关系：

$$\mathscr{E}\subset\mathscr{C}\subset\mathscr{S}\subset\mathscr{W},$$

其中每一个包含关系都可能是真正的包含而不相等。

利用定理 1 可以给 Mackey 定理另一个证明。

定理(Mackey)　设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，则对 X 上的任一相容拓扑 T 具有相同的有界集。

证　设 $A\subset X$ 是 $\sigma(X, Y)$ 有界集。U 是 (X, T) 中 0 的任一均衡凸闭环境，则 U 也是弱闭的。根据双极定理，$U=U^{00}$。由 Alaoglu 定理可知道，U^0 是 Y 中 $\sigma(Y, X)$ 紧子集。由推论 2 可知，U^0 是强有界集。从而即知

$$\sup_{x\in A}\sup_{f\in U^0}|\langle x, f\rangle|=\sup_{f\in U^0}p^A(f)=M<\infty.$$

由此 $A\subset MU^{00}=MU$，A 是 T 有界集。又由 $\sigma(X, Y)\subset T$，T 有界集必为弱有界。所以，对 X 上任一相容拓扑 T，T 有界集和弱有界集一致，从而对每个相容拓扑，有相同的有界集。证毕。

定理 2(Banach-Mackey 定理)　设 X 是局部凸空间，则 X 中任一序列完备均衡凸闭有界子集必是强有界的(即 $\beta(X, X')$ 有界)。特别是，在序列完备的局部凸空间中，每个有界集是强有界的。

证　考虑自然对偶 $\langle X, X'\rangle$，取 $\mathscr{B}$ 为 X' 中的均衡凸 $\sigma(X', X)$ 有界子集全体，由性质(I)和定理 1 即知。证毕。

定理 3　设局部凸空间 X 是序列完备的，则

(a)　X' 中的每个弱*有界集必为强有界；

(b)　X 中的每个桶必吸收一切有界集；

(c)　X 上的每个下半连续拟范数必在任一有界集上有界。

证　(a)，(b)，(c)相互等价性是容易证明的。考虑自然对偶

$\langle X, X'\rangle$；取 $\mathscr{B}$ 是 X 中的均衡凸闭有界子集全体，则根据性质(I)，$\mathscr{B}$ 中每个集是自完备的。再由定理 1 的(b)即得(a)。证毕。

系 设 X 是序列完备的局部凸空间，$\{f_n\}$ 是 X 上的一列连续线性泛函，并且对于每个 $x\in X$，$\lim f_n(x)=f(x)$。则 $f(x)$ 必是 X 上的有界线性泛函。

证 容易知道，$f\in X^*$ 是 X 上线性泛函。由条件 $\{f_n\}\subset X'$ 是 $\sigma(X', X)$有界集，从而由定理 3 的(a)必是强有界集。所以对于 X 中的任一有界集 A，有 $M_A=\sup\limits_n p^A(f_n)<\infty$，由此

$$\sup_{x\in A}|f_n(x)|\leqslant M_A<\infty \quad (n=1, 2, \cdots).$$

令 $n\to\infty$，得

$$\sup_{x\in A}|f(x)|\leqslant M_A<\infty.$$

即 $f(x)$在每个有界集上有界。证毕。

定义 设(X, T)是局部凸空间，如果 X 的每个有界集是 $\beta(X, X')$有界的，则称(X, T)为 Banach-Mackey 空间。设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间。如果 X 中所有的有界集(即 $\sigma(X, Y)$有界)是强有界(即 $\beta(X, Y)$有界)的，则称对偶空间$\langle X, Y\rangle$为 Banach-Mackey 对偶。

根据上述定义，如果 X 是 Banach-Mackey 空间，考虑自然对偶$\langle X, X'\rangle$，则在 X 上的所有可允许拓扑都有相同的有界集。桶式空间是 Banach-Mackey 空间的平凡例子。由 Banach-Mackey 定理可知道，每个序列完备的局部凸空间是 Banach-Mackey 空间。

定理 4 如果$\langle X, Y\rangle$是 Banach-Mackey 对偶，则$\langle Y, X\rangle$必也是 Banach-Mackey 对偶。

证 设 A 是 Y 中任一 $\sigma(Y, X)$ 有界集，令 B 是 Y 中 0 的任一 $\beta(Y, X)$拓扑环境，由于 Y 中的 $\sigma(Y, X)$桶全体是 0 点 $\beta(Y, X)$拓扑环境基。不妨设 B 是一个 $\sigma(Y, X)$桶。如果能证明 A 被 B 吸收，则即知 A 是 $\beta(Y, X)$有界集，$\langle Y, X\rangle$是 Banach-Mackey 对偶。

事实上，可知 B^0 是 $\sigma(X, Y)$有界集，而 $A^0\in\mathscr{N}(\beta(X, Y))$，由假定$\langle X, Y\rangle$是 Banach-Mackey 对偶，所以 B^0 被 A^0 吸收，由此，A

被 $B^{00}=B$ 吸收。证毕。

下面先证一个引理：

引理　设 X 是线性空间，A、B 分别是 X 中的子集，则均衡凸集 A 吸收 B 的充要条件为：对于 B 中任意一可列子集 $\{b_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$，A 必吸收集合 $\left\{\frac{b_n}{n}, n=1, 2, \cdots\right\}$。

证　只要证明充分性：用反证法：如果 A 不吸收 B，则 $B\not\subset n^2A$ $(n=1, 2, \cdots)$，设 $b_n\in B\setminus n^2A$，则由于 $\frac{b_n}{n}\,\overline{\in}\, nA$，所以 A 不吸收集 $\left\{\frac{b_n}{n}, n=1, 2, \cdots\right\}$。这与引理的假设矛盾。证毕。

定理 5　设 X 是局部凸空间，并具有凸紧性，则 X 是 Banach-Mackey 空间。

证　根据定理 4，只要证明 $\langle X', X\rangle$ 是 Banach-Mackey 对偶即可。设 A 是 X' 中的 $\sigma(X', X)$ 有界集。任取 X 中的有界集 B，则 $B^0\in\mathscr{N}(\beta(X', X))$。由于这种 B^0 全体构成 0 点 $\beta(X', X)$ 拓扑环境基，所以只要证明 B^0 吸收 A，即可知 A 是 $\beta(X', X)$ 有界集。从而定理得证。

事实上，任取一列元 $b_n\in B$，令 $S=\left\{\frac{b_n}{n}, n=1, 2, \cdots\right\}$，由于 B 是有界集，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$，$S\cup\{0\}$ 是 X 中的紧集。由假设局部凸空间 X 具有凸紧性，所以 $S\cup\{0\}$ 的均衡凸包 S^{00} 是紧的。从而是弱紧的，则由 §5 Mackey-Arens 定理可知，S^{00} 是 $(X', \tau(X', X))$ 上的等度连续集合。则根据 §6 中的(III)，S^{00} 是 $\beta(X, X')$ 有界集。又 $A^0\in\mathscr{N}(\beta(X, X'))$，所以 A^0 吸收 S^{00}，更吸收 S。由引理可知，A^0 吸收集 B，从而 B^0 吸收 A。证毕。

系　设 X 是局部凸线性距离空间，则 $(X', \beta(X', X))$ 是 Banach-Mackey 空间。

证　由假设 X 是囿空间，由 §6 知，X 必是 Mazur 空间，则根据 §6 定理 1 的推论，$(X', \beta(X', X))$ 是完备的，故根据定理 5，$(X', \beta(X', X))$ 是 Banach-Mackey 空间。证毕。

§8 Grothendieck 完备性定理

对于局部凸线性拓扑空间 X，我们已经知道有两种方法可以给出它的完备化局部凸空间(严格地讲是完备包)。第一种方法是把 X 看作一致性空间引入的完备化；另一种方法是把 X 嵌入 Banach 空间的拓扑积。在本节中，我们叙述由 Grothendieck 引入的完备化构造。

定理 1(Grothendieck 完备性定理) 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$\mathscr{B}$ 是 Y 中由均衡凸弱闭弱有界子集组成的集族，满足下述条件：

(a) $\bigcup\{B, B\in\mathscr{B}\}=Y$；

(b) 如 B_1、$B_2\in\mathscr{B}$，则必存在 $B_3\in\mathscr{B}$，使得 $B_1\subset B_3$，$B_2\subset B_3$。

我们记 $\hat{X}_{\mathscr{B}}$ 为 Y 上满足如下条件的线性泛函 f 的全体组成的线性空间：f 在每一个 $B\in\mathscr{B}$ 上的限制是 $\sigma(Y, X)$连续的。如果在 $\hat{X}_{\mathscr{B}}$ 上引进在 $\mathscr{B}$ 中集上的一致收敛拓扑 $\hat{T}_{\mathscr{B}}$，则$(\hat{X}_{\mathscr{B}}, \hat{T}_{\mathscr{B}})$ 是完备局部凸空间。并且$(X, T_{\mathscr{B}})$是$(\hat{X}_{\mathscr{B}}, \hat{T}_{\mathscr{B}})$的稠密子空间。

证 容易知道，$\hat{X}_{\mathscr{B}}$ 是一个线性空间。并有包含关系 $X\subset\hat{X}_{\mathscr{B}}\subset Y^*$，其中 Y^* 表示 Y 上线性泛函全体。

考虑对偶$\langle Y, \hat{X}_{\mathscr{B}}\rangle$，则对于每个 $B\in\mathscr{B}$ 是 $\sigma(Y, \hat{X}_{\mathscr{B}})$有界的。事实上，如果 $B\in\mathscr{B}$，对任一 $f\in\hat{X}_{\mathscr{B}}$，只要证明 $f(B)$是有界的。任意取一列元$\{a_n\}\subset B$，由于 $B\in\mathscr{B}$ 是均衡凸 $\sigma(Y, X)$有界集，所以

$$\frac{1}{n}a_n\in B,\ \text{并且}\ \frac{1}{n}a_n\xrightarrow{\sigma(Y, X)}0.$$

由假定 $f\in\hat{X}_{\mathscr{B}}$，$f$ 在 B 上是 $\sigma(Y, X)$连续的，所以

$$\frac{1}{n}f(a_n)=f\left(\frac{1}{n}a_n\right)\to 0.$$

因而 $f(B)$是有界集。

由于条件(a)，$\bigcup\{B, B\in\mathscr{B}\}=Y$，集族 $\mathscr{B}$ 可以看作 Y 上关于$\langle Y, \hat{X}_{\mathscr{B}}\rangle$的可允许集族。

下面证明 $\hat{X}_{\mathscr{B}}$ 按 $\mathscr{B}$ 上一致收敛拓扑 $\hat{T}_{\mathscr{B}}$是完备的。设 $\hat{x}_\gamma$ 是

$(\hat{X}_{\mathscr{B}}, \hat{T}_{\mathscr{B}})$ 中的基本定向点列。由于 $\hat{T}_{\mathscr{B}} \supset \sigma(\hat{X}_{\mathscr{B}}, Y)$，必存在 $\hat{x} \in Y^*$，使得在 Y 上 $\hat{x}_\tau$ 点点收敛到 $\hat{x}$，并且在 $\mathscr{B}$ 的每个集上是一致收敛的。因此 $\hat{x}$ 在每个 $B \in \mathscr{B}$ 上是 $\sigma(Y, X)$ 连续的。即 $(\hat{X}_{\mathscr{B}}, \hat{T}_{\mathscr{B}})$ 完备。

由条件(*b*)知道，拟范数族 $\{p^B(\hat{x}), B \in \mathscr{B}\}$ 是局部凸空间 $(\hat{X}_{\mathscr{B}}, \hat{T}_{\mathscr{B}})$ 上的连续拟范数基，其中 $p^B(\hat{x}) = \sup\limits_{y \in B} |\langle y, \hat{x}\rangle|$，$\hat{x} \in \hat{X}_{\mathscr{B}}$。为了证明 $(X, T_{\mathscr{B}})$ 是 $(\hat{X}_{\mathscr{B}}, T_{\mathscr{B}})$ 的稠密子空间，只要证明：对于任一 $\hat{x} \in \hat{X}_{\mathscr{B}}$，及每一个 $B \in \mathscr{B}$ 和 $\varepsilon > 0$，必存在 $x \in X$，使得 $p^B(x - \hat{x}) \leqslant \varepsilon$。这可由下述定理推得。

定理 2（逼近定理） 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，B 是 Y 中均衡凸弱闭集。如果 Y 上的线性泛函 y^* 在 B 上的限制是弱连续的，则 y^* 必属于 X 按 B 上一致收敛范数 $p^B(x)$ 的完备化空间。这就是说，对于任一 $\varepsilon > 0$，必存在 $x \in X$，使得

$$|\langle x, y\rangle - \langle y^*, y\rangle| \leqslant \varepsilon, \quad y \in B. \tag{1}$$

证 记 Y^* 为 Y 上的线性泛函全体组成的线性空间，则 X 可看作 Y^* 的子空间。由假设 y^* 在 B 上弱连续，故对于任一 $\varepsilon > 0$，必存在 Y 中 0 的 $\sigma(Y, X)$ 拓扑环境 V，使当 $y \in B \cap V$ 时，有

$$|\langle y^*, y\rangle| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

考虑对偶 $\langle Y^*, Y\rangle$，则根据(2)，$y^*/\varepsilon \in [B \cap V]^0_{Y^*}$。不失一般性，设 $V = [F]^0_Y$，其中 F 是 X 中的有限点集。又由于 B 是 Y 中均衡凸 $\sigma(Y, X)$ 闭子集，根据双极定理，$B = [[B]^0_X]^0_Y$，所以

$$[B \cap V]^0_{Y^*} = [[[B]^0_X \cup F]^0_Y]^0_{Y^*} = [\Gamma([B]^0_X \cup F)]^-_{\sigma(Y^*, Y)},$$

其中 $\Gamma(A)$ 表示集 A 的均衡凸包。令 K 为集 F 的均衡凸 $\sigma(Y^*, Y)$ 闭包。由于 K 属于有限维子空间，所以 K 是 Y^* 中的 $\sigma(Y^*, Y)$ 紧集，并且 $K \subset X$。因此，$[B]^0_{Y^*} + K$ 是 Y^* 中的 $\sigma(Y^*, Y)$ 闭凸集。因而

$$\frac{y^*}{\varepsilon} \in [B \cap V]^0_{Y^*} \subset [B]^0_{Y^*} + K.$$

由此必存在一点 $x' \in K \subset X$，使得 $y^*/\varepsilon - x' \in [B]^0_{Y^*}$。令 $x = \varepsilon x'$，即得 $y^* - x \in \varepsilon[B]^0_{Y^*}$，这就是(1)式，证毕。

下面给出定理 1 的重要推论：

推论 1 在定理 1 的条件下，局部凸空间$(X, T_{\mathscr{B}})$是完备的充要条件为：如果 f 是 Y 上的线性泛函，限制在每个 $B\in\mathscr{B}$ 上是 $\sigma(Y, X)$连续的。则 f 必是 $\sigma(Y, X)$连续的，即 $f\in X$。

设 f 是 Y 上的线性泛函，则 $N_f=\{y|f(y)=0\}$ 是 Y 中的极大线性子空间。线性泛函 f 和极大线性子空间并不是一一对应的。如果 $f_1=cf_2$，则显然有 $Nf_1=Nf_2$。反过来，如果已知 $Nf_1=Nf_2$，则由 §1 中的引理 1 知 $f_1=cf_2$。所以 Y 上每个极大线性子空间精确到一个常数因子和线性泛函一意对应。由于 f 是 $\sigma(Y, X)$连续的充要条件为 N_f 是 $\sigma(Y, X)$ 闭的。f 在均衡凸集 B 上的限制是 $\sigma(Y,X)$ 连续的充要条件为 $N_f\cap B$ 在 B 中是弱闭的（由第一章 §9 中的定理 3）。由于 B 是 $\sigma(Y, X)$闭的，故充要条件为 $N_f\cap B$ 是 $\sigma(Y, X)$闭的。由此我们得到推论的等价形式：

推论 1′ 在定理 1 的条件下，局部凸空间$(X, T_{\mathscr{B}})$是完备的充要条件为：对于 Y 中的超平面 H，如果和 $\mathscr{B}$ 中每个集的交集是 $\sigma(Y, X)$闭的，则 H 本身也是 $\sigma(Y, X)$闭的。

在第 4 章 §3 中，将基于上述形式对完备性概念作推广。

定义 在定理 1 中所构造的局部凸空间$(\hat{X}_{\mathscr{B}}, \hat{T}_{\mathscr{B}})$称为局部凸空间$(X, T_{\mathscr{B}})$的 Grothendieck 完备化。

设 X 是局部凸空间。考虑自然对偶$\langle X, X'\rangle$，取 $\mathscr{B}$ 为 X' 中的等度连续集合全体，则$(\hat{X}_{\mathscr{B}}, \hat{T}_{\mathscr{B}})$即是局部凸空间 X 的完备化。和以前一样，我们知道完备化空间在同构意义下是唯一的。

设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，如在 X 上取相容拓扑 T，则可以化为自然对偶$\langle X, X'\rangle$的情形。

定理 3 设 X 是局部凸空间，则 X 是完备的充要条件为：X' 上的线性泛函 φ，如果在 X' 中每个等度连续集合上 $\sigma(X', X)$ 连续，则 φ 在 X' 上 $\sigma(X', X)$连续，即 $\varphi\in X$。

定理 4 设 X 是局部凸空间，则 X' 关于强拓扑 $\beta(X', X)$是完备的充要条件为：X 上的线性泛函 f，如果在 X 的每个有界集上连续，则 f 在整个 X 上连续。

证 考虑自然对偶$\langle X, X'\rangle$。令$\mathscr{B}$是X中的有界集全体，由Mackey定理知，X中的有界集和$\sigma(X, X')$有界集是一致的。令$\mathscr{B}_1$是X中均衡凸闭有界集全体，则$\mathscr{B}_1$是$\mathscr{B}$的基本子集族，所以$\beta(X', X) = T_{\mathscr{B}} = T_{\mathscr{B}_1}$。根据定理1，$(X', \beta(X', X))$是完备的充要条件为：$X$上的线性泛函$f$如果在每个$A\in\mathscr{B}_1$上$\sigma(X, X')$连续，则$f\in X'$。即$f$是$X$上连续线性泛函。由于$A$是均衡凸闭集，由第一章§9中的定理3可知，线性泛函f在A上$\sigma(X, X')$连续的充要条件为f在A上连续。上述条件等价于如果f在每个$A\in\mathscr{B}_1$上连续，则$f\in X'$。而这个又和定理4的结论等价。证毕。

定理4可以用几何语言叙述如下：设X是局部凸空间，X'关于强拓扑完备的充要条件为：X的任一超平面N，如果同每个有界均衡凸闭集的交是闭的，则N是闭的。

在§6的定理9中我们证明了：对于局部凸空间(X, T)，X'中T^0拓扑是满足下述条件的最强可允许拓扑，使得在每个等度连续集合上和$\sigma(X', X)$一致。下述定理说明，当(X, T)是完备时，T^0是满足上述条件的最强局部凸拓扑，不再限制可允许拓扑这个条件。

定理5(Ptak-Schwartz) 设(X, T)是完备的局部凸空间，则X'中的每一个均衡凸集V是(X', T^0)中0的环境的充要条件为：对于每一个均衡凸等度连续集合E，$V\cap E$是E中0的$\sigma(X', X)$环境。

证 只要证明充分性：令$\mathscr{V}$是所有满足上述条件的V的全体。根据第二章的内容容易知道，以$\mathscr{V}$为局部基决定唯一的局部凸拓扑T_1，我们证明$T_1 = T^0$：

考虑局部凸空间(X', T_1)，设φ是其上任一连续线性泛函，则φ在X'中每个均衡凸等度连续集合E上是$\sigma(X', X)$连续的。因为(X, T)是完备的，由Grothendieck定理知$\varphi\in X$，即$(X', T_1)' = X$。T_1是X'上关于$\langle X, X'\rangle$的相容拓扑，则T_1拓扑等于在(X中关于T_1的)均衡凸等度连续集合全体$\mathscr{E}_{T_1}$上的一致收敛拓扑。

设$F\in\mathscr{E}_{T_1}$，是X中关于T_1的等度连续集合。因为$(X', T_1)'$

$=X$，由 Alaoglu 定理知，F 是 $\sigma(X, X')$ 完全有界的。由 §6 中的定理 6 可知，在 F 上 $\sigma(X, X')$ 和 T_1^0 拓扑一致，即 $\sigma(X, X')|_F = T_1^0|_F$。所以由 §6 中的引理 2 可知，$F$ 也是 T_1^0 完全有界集。如果能证明 $T \subset T_1^0$，则 F 必也是 T 完全有界集。从而 $\mathscr{G}_{T_1}$ 上一致收敛拓扑 $T_1 \subset T^0$。另一方面，由定义又知 $T^0 \subset T_1$，所以 $T_1 = T^0$。

下面证明 $T \subset T_1^0$。设 E 为 X' 中的均衡凸 T 等度连续集合。由定理的条件 $T_1|_E = \sigma(X', X)|_E$，则由 E 是 $\sigma(X', X)$ 完全有界而推得 E 是 T_1 完全有界，所以 $T \subset T_1^0$。证毕。

§9 局部凸空间类

一、桶式空间和拟桶式空间

在第二章 §1 中，我们引入了桶式空间和圈空间的概念。

定义 在局部凸空间 X 中，如果每个桶都是 0 的环境，则称 X 为桶式空间。

定理 1 设 X 是第二纲的局部凸空间，则 X 是桶式空间。

证 设 T 是一个桶，则 $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nT$。由于 X 是第二纲集，故至少有一个 nT 包含一个内点，由此 $2T = T - T$ 是 0 的环境。证毕。

定理 2 设 X 是局部凸空间，则下述诸条件是等价的：

(a) X 是桶式空间；

(b) X 中的每个桶是 0 的环境；

(c) X 上的每个下半连续拟范数是连续的；

(d) X 上的拓扑和 $\beta(X, X')$ 一致；

(e) 在 X' 中每个 $\sigma(X', X)$ 有界集是等度连续的；

(f) X 是 Mackey 空间，并且 X' 关于 $\sigma(X', X)$ 拓扑是有界完备的。

证 由 §2 中的引理 1 和定理 4 以及 §6 中的性质 (II) 知：(a)、(b)、(c)、(d)、(e) 是等价的。(e)⇒(f)：考虑自然对偶 $\langle X, X'\rangle$，由于 X' 中的每个均衡凸 $\sigma(X', X)$ 紧子集是 $\sigma(X', X)$ 有界

的，由(e)知是等度连续的，所以X上的拓扑$T\supset\tau(X, X')$。由Mackey-Arens 定理知$T=\tau(X, X')$，即X是 Mackey 空间。同时，由(e)，X'上每个$\sigma(X', X)$有界集是等度连续的，则由 Alaoglu-Bourbaki 定理知是相对$\sigma(X', X)$紧的。由此知X'是$\sigma(X', X)$有界完备的。(f)$\Rightarrow$(b)：设U是X中的一个桶，则U^0是X'中的$\sigma(X', X)$有界闭集，根据(f)，$(X', \sigma(X', X))$是有界完备的，故U^0是$\sigma(X', X)$紧的。由X是 Mackey 空间知$U=U^{00}$是X中0的环境，即知X是桶式空间。证毕。

推论 1 设X是桶式空间，则$(X', \sigma(X', X))$是序列完备的，所以对X'上关于$\langle X', X\rangle$的每个可允许拓扑是序列完备的。

定理 3 设X是桶式空间，Y是局部凸空间，$\{f_n\}$是X到Y的连续线性映照序列，g：$X\to Y$是线性映照。如果对于每个$x\in X$，$f_n(x)\to g(x)$。则g是连续的。

证 设$V\in\mathcal{N}(Y)$是一个桶，令$U=\bigcap_{n=1}^{\infty}f_n^{-1}(V)$，则$U$是均衡凸闭集。由于对每个$x\in X$，$\{f_n(x)\}$是收敛点列，所以是有界的，能被$V$吸收，由此$x$能被$U$吸收。从而可知道$U$是$X$中的一个桶，由假定$X$是桶式空间，所以$U\in\mathcal{N}(X)$。由$f_n(U)\subset V$，以及$V$是闭的可知$g(U)\subset V$，即知$g$是连续的。证毕。

在无限维线性空间上赋以最强局部凸拓扑(参阅第二章 §6 中的例3)是第一纲的桶式空间，下面是有界完备但不是完备的例子：

例 1 设X是桶式空间，但$X'\neq X^*$，则$(X', \sigma(X', X))$是$(X^*, \sigma(X^*, X))$中稠密的有界完备的子空间，但不是完备的。

由定理 2，如果$\tau(X, Y)$是桶式的，则必有$\tau(X, Y)=\beta(X, Y)$，但是一般来说，$\beta(X, Y)$不一定是桶式的。

设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，在Y上取强拓扑$\beta(Y, X)$。则X上关于Y中强有界集全体上一致收敛的拓扑称为拟强拓扑，记为$\beta^*(X, Y)$，显然有$\beta^*(X, Y)\subset\beta(X, Y)$。

定义 设X是局部凸空间，如果X上每个下半连续且在每个有界集上有界的拟范数是连续的，则称X为拟桶式的。

定理 4 设 X 是局部凸空间，则下述条件是等价的：

(a) X 是拟桶式空间；

(b) X 中吸收每个有界集的桶是 0 的环境；

(c) 一切下半连续拟范数，如在每个有界集上有界，则必定连续；

(d) X 上的拓扑和 $\beta^*(X, X')$ 是一致的；

(e) X' 中的每个强有界集是等度连续的；

(f) X 是 Mackey 空间，且 X' 中的每个强有界集是相对弱*紧的。

证 证明和定理 1 是类似的。只要考虑到由 Banach-Mackey 定理知 X' 中的每个均衡凸弱*紧子集是强有界的。证毕。

显然，桶式空间一定是拟桶式空间，但有：

(I) 序列完备的拟桶式空间是桶式空间。

证 设 X 是序列完备的，由 Banach-Mackey 定理知 X' 中的强有界集和弱*有界集是一致的。由定理 1 的(e)及定理 3 的(e)即知。

由定理 4 的(e)即得下述结论：

(II) 拟桶式空间 X 的强对偶 $(X', \beta(X', X))$ 是有界完备的。

(III) 设 X 是桶式(拟桶式)空间，则 X' 中的每个弱*(强)紧集的弱*(强)闭凸包是弱*(强)紧的。

对于"(拟)桶式空间的归纳拓扑仍是(拟)桶式的"这一点，我们已在第二章 §6 中证明了。对于投影拓扑则没有如上结论，但有

(IV) (拟)桶式空间的拓扑积是(拟)桶式的。

证 设 $X=\prod X_\alpha$，X_α 是桶式空间，$X'=\oplus X'_\alpha$。可以证明 $\beta(X, X')=\prod\beta(X_\alpha, X'_\alpha)$。由于 $\beta(X_\alpha, X'_\alpha)$ 等于 X_α 中的拓扑，所以 $\beta(X, X')$ 等于 X 上的乘积拓扑。证毕。

还要指出一些事实：一般来说，桶式空间不一定是完备的。完备的局部凸空间可以不是拟桶空间。桶式空间的闭子空间可以不是拟桶式空间。拟桶式空间可以不是桶式的(参阅[4])。

二、囿空间(或有界型空间)

以前我们曾给出囿空间的定义：一个局部凸空间 (X, T)，其上的拟范数 $p(x)$ 如在每个有界集上有界，则必连续，于是称 (X, T) 为囿空间。考虑到每个拟范数 $p(x)$ 对应于均衡凸集 $\{x \mid p(x) \leqslant 1\}$ 的 Minkowski 泛函，所以有如下等价的定义：

定义 局部凸空间 (X, T) 是囿空间的充要条件为：X 上的均衡凸子集 M 如果吸收 X 中的每个有界集，则必为 0 的环境。

比较一下定义即知有：

(V) 每个囿空间是拟桶式空间。

(VI) 每个序列完备的囿空间必是桶式空间。

由于我们已经知道囿空间 X 上的有界线性泛函必是连续的，所以其上的连续线性泛函全体 X' 和有界线性泛函全体 X^b 是一致的。如以 $\mathscr{B}(X, T)$ 表示局部凸空间 (X, T) 中有界集全体，则 X^b 可以由 $\mathscr{B}(X, T)$ 唯一确定。这样，对于囿空间知道了 $\mathscr{B}(X, T)$，就可确定 X'。同时根据性质(I)，每个囿空间是拟桶式空间，所以是 Mackey 空间，$T=\tau(X, X')=\tau(X, X^b)$。从而对于囿空间，$T$、$X'$ 与 $\mathscr{B}(X, T)$ 这三者中间只要知道一个，就可确定其余两个。对于一般的局部凸空间 (X, T_1)，$\mathscr{B}(X, T_1)$ 仅依赖于对偶 $\langle X, X'\rangle$。如果我们象以前一样，由 $\mathscr{B}(X, T_1)$ 出发先构作 X^b，再作 $T=\tau(X, X^b)$，则明显有

$$T_1 \subset \tau(X, X') \subset \tau(X, X^b) = T,$$

由此提出这样的问题：这样构造的 T 是不是囿的？另外我们还知道，T 和 T_1 有相同的有界集。事实上，$\mathscr{B}(X, T_1)$ 必须是 X 中的 $\sigma(X, X')$ 有界集全体，由于 $f \in X^b$ 是有界线性泛函，所以 $\mathscr{B}(X, \sigma(X, X')) \subset \mathscr{B}(X, \sigma(X, X^b))$。又由于 $\sigma(X, X') \subset \sigma(X, X^b)$，所以 $\mathscr{B}(X, \sigma(X, X^b)) \subset \mathscr{B}(X, \sigma(X, X'))$。由此即知 $\mathscr{B}(X, \sigma(X, X^b)) = \mathscr{B}(X, \sigma(X, X'))$。所以 T 和 T_1 有相同的有界集。因而可提这样的问题：囿空间是不是具有相同有界集的最强局部凸拓扑？

定理 5 设 $(X, \mathscr{T})$ 是局部凸空间，则 $(X, \mathscr{T})$ 是囿的充要条件为 $\mathscr{T}$ 是 X 上的具有相同有界集的最强局部凸拓扑。即如果

$\mathscr{T}_1\supset\mathscr{T}$，且$\mathscr{B}(X,\mathscr{T}_1)=\mathscr{B}(X,\mathscr{T})$，则必有$\mathscr{T}_1=\mathscr{T}$。

证 充分性：设$\mathscr{T}$是X上的具有相同有界集的最强局部凸拓扑。如果$(X,\mathscr{T})$不是囿空间，则必存在均衡凸集$K\subset X$吸收每个有界集，但不是0的环境。设$\{p_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$是$(X,\mathscr{T})$上的连续拟范数全体。令$q(x)$是$K$的Minkowski泛函，则由$\{p_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}\cup\{q\}$定义的拓扑$\mathscr{T}_1$强于$\mathscr{T}$，且$\mathscr{T}_1\neq\mathscr{T}$。并且$\mathscr{B}(X,\mathscr{T})=\mathscr{B}(X,\mathscr{T}_1)$。事实上，如果$A\in\mathscr{B}(X,\mathscr{T})$，则当$\alpha\in\mathscr{A}$时，

$$\sup_{x\in A}p_\alpha(x)<\infty。\tag{1}$$

另一方面，由于K吸收$\mathscr{B}(X,\mathscr{T})$中的每个$A$，存在正数$\delta$，使得

$$|\lambda|\leqslant\delta\Rightarrow\lambda A\subset K。$$

因此，当$x\in A$时，$q(\delta x)\leqslant1$，即知

$$\sup_{x\in A}q(x)\leqslant\frac{1}{\delta}<\infty。\tag{2}$$

根据(1)、(2)可知$A\in\mathscr{B}(X,\mathscr{T}_1)$，因此，$\mathscr{B}(X,\mathscr{T}_1)=\mathscr{B}(X,\mathscr{T})$。这和假设相矛盾。所以$(X,\mathscr{T})$是囿空间。

必要性：设X是囿空间，如果X上还有另一局部凸向量拓扑$\mathscr{T}_1\supset\mathscr{T}$，而且$\mathscr{B}(X,\mathscr{T}_1)=\mathscr{B}(X,\mathscr{T})$。任取均衡凸环境$V\in\mathscr{N}(\mathscr{T}_1)$，由于它吸收$\mathscr{B}(X,\mathscr{T})$中的每个集，所以$V\in\mathscr{N}(\mathscr{T})$，因此$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}$，这就证明了$\mathscr{T}_1=\mathscr{T}$。证毕。

定理6 设$(X,\mathscr{T})$是局部凸空间，则必有唯一的$\mathscr{T}_b\supset\mathscr{T}$，使得$(X,\mathscr{T}_b)$成为囿空间，而且$\mathscr{B}(X,\mathscr{T})=\mathscr{B}(X,\mathscr{T}_b)$。

证 设$\{p_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$是$(X,\mathscr{T})$上的连续拟范数全体。令$q(x)$是满足如下条件的拟范数：对一切$A\in\mathscr{B}(X,\mathscr{T})$，$\sup\limits_{x\in A}q(x)<\infty$，令$\{p_\beta,\beta\in\Lambda\}$是上述的拟范数$q$的全体，显然$\mathscr{A}\subset\Lambda$。记由$\{p_\beta,\beta\in\Lambda\}$导出的局部凸拓扑为$\mathscr{T}_b$，则$\mathscr{T}_b\supset\mathscr{T}$，且$\mathscr{B}(X,\mathscr{T}_b)=\mathscr{B}(X,\mathscr{T})$。

现证$(X,\mathscr{T}_b)$是囿空间。设K是吸收$\mathscr{B}(X,\mathscr{T}_b)$中的一切集的均衡凸集。设$q$是$K$的Minkowski泛函，则对每个$A\in\mathscr{B}(X,\mathscr{T})$，(2)式成立。所以$q\in\{p_\beta,\beta\in\Lambda\}$。由$K\supset\{x|q(x)<1\}$，

K是$\mathscr{T}_b$拓扑0的环境。

再证$\mathscr{T}_b$的唯一性：如有$\mathscr{T}_1\supset\mathscr{T}$，使$(X, \mathscr{T}_1)$为囿空间，而且$\mathscr{B}(X, \mathscr{T}_1)=\mathscr{B}(X, \mathscr{T})$，任取$(X, \mathscr{T}_1)$中0的均衡凸环境$K$，由于$K$吸收$\mathscr{B}(X, \mathscr{T}_1)=\mathscr{B}(X, \mathscr{T}_b)$中的集，根据$(X, \mathscr{T}_b)$是囿空间，$K$是$\mathscr{T}_b$拓扑0的环境，因此$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_b$。但这时，$\mathscr{B}(X, \mathscr{T}_1)=\mathscr{B}(X, \mathscr{T}_b)$，由$\mathscr{T}_1$是囿的知$\mathscr{T}_1=\mathscr{T}_b$。证毕。

定理6中X上拓扑$\mathscr{T}_b$称为局部凸向量拓扑$\mathscr{T}$的囿延拓，如果$\mathscr{T}$是囿的，则$\mathscr{T}_b=\mathscr{T}$。容易知道$\mathscr{T}_b=\tau(X, X^b)$。

定理7 设$(X, \mathscr{T})$是局部凸空间，$\mathscr{T}_b$是囿延拓，则X上的线性泛函族F是$\mathscr{T}_b$等度连续的充要条件为：F关于有界集上的一致收敛拓扑是有界的。特别是，X上的线性泛函f是$\mathscr{T}_b$连续的充要条件为f是有界的。

证 必要性：设F是$\mathscr{T}_b$等度连续线性泛函族，必存在$V\in\mathscr{N}(\mathscr{T}_b)$，使当$x\in V$时，对每个$f\in F$，有$|f(x)|\leqslant1$。如果$B$是$X$中的有界集，则必存在$\lambda>0$，使$\lambda B\subset V$，所以

$$\sup_{f\in F}\sup_{x\in B}|f(x)|\leqslant\frac{1}{\lambda}.$$

即得必要性。

充分性：设F关于有界集$\mathscr{B}(X, \mathscr{T})$上的一致收敛拓扑是有界的。令$V=\bigcap_{f\in F}\left\{x\,\middle|\,|f(x)|\leqslant1\right\}=\left\{x\,\middle|\,\sup_{f\in F}|f(x)|<1\right\}$，则$V$是$X$中的均衡凸集，且吸收$\mathscr{B}(X, \mathscr{T})$中的每一个集。由于$(X, \mathscr{T}_b)$是囿的，故必须是$\mathscr{T}_b$拓扑0的环境。证毕。

下面的定理表明了用囿空间上的有界线性泛函必连续这一性质来刻划拓扑$\mathscr{T}$是不够的。

定理8 局部凸空间$(X, \mathscr{T})$是囿的充要条件为：X上的有界线性泛函必连续*)，并且$(X, \mathscr{T})$是Mackey空间。

证 充分性：只要证明$\mathscr{T}=\mathscr{T}_b$即可。考虑对偶$\langle X, X^b\rangle$，设$C$是$X^b$上的均衡凸$\sigma(X^b, X)$紧子集。由Banach-Mackey定理知，$C$是强拓扑$\beta(X^b, X)$有界的，由定理7知，$C$是$\mathscr{T}_b$等度连续的，

*) 通常称有界线性泛函均连续的局部凸空间为半囿的(semibornological)。

所以有 $\tau(X, X^b)\subset\mathscr{T}_b$。但由于 X^b 是 $\mathscr{T}_b$ 连续线性泛函全体，故有 $\tau(X, X^b)\supset\mathscr{T}_b$，所以 $\mathscr{T}_b=\tau(X, X^b)$。由假定 $(X, \mathscr{T})$ 是 Mackey 空间，$\mathscr{T}_b=\tau(X, X^b)=\mathscr{T}$，$(X, \mathscr{T})$是囿空间。

必要性是明显的。证毕。

但还有下述定理：

定理 9 局部凸空间(X, T)是囿的充要条件为：(X, T)到任一局部凸空间(Y, T')的有界线性映照是连续的。

证 充分性：如取 Y 为数域 K，则根据条件，每个有界线性泛函是连续的。考虑自然对偶 $\langle X, X'\rangle$，则恒等映照 I：$(X, T)\to(X, \tau(X, X'))$ 是有界线性映照，这是由于关于自然对偶，T 和 $\tau(X, X')$是两个相容拓扑，所以有相同的有界集。由定理假设，I 是连续的，所以 $T\supset\tau(X, X')$。由此 $T=\tau(X, X')$。根据定理 7，即知(X, T)是囿空间。

必要性类似于定理 7 的证明。证毕。

系 1 局部凸空间 (X, T) 到局部凸空间 (Y, T') 的线性映照是有界的充要条件为：它是(X, T_b)到(Y, T')的连续映照。

系 2 设 X 是囿空间，Y 是局部凸空间，则 X 到 Y 的序列连续线性映照必连续。

因为序列连续线性映照必有界。证毕。

定义 设 X 是局部凸空间，X 中序列$\{x_n\}$按 Mackey 意义（或称有界地）收敛于 0 是指：存在均衡凸闭有界集 $B\subset X$，使 $\{x_n\}\subset X_B$，且 x_n 按 X_B 中的范数收敛于 0。记作 $x_n\xrightarrow{M}0$。

因为 X 中均衡凸闭有界集仅和对偶 $\langle X, X'\rangle$ 有关，所以按 Mackey 意义收敛也只和对偶有关。很明显，$x_n\xrightarrow{M}0\Rightarrow x_n\xrightarrow{\tau}0$。

定理 10 局部凸空间 X 是囿空间的充要条件为：满足下述一个等价的条件：

(a) 任一吸收每个有界集的均衡凸集是 0 的环境；

(b) 任一拟范数 $p(x)$ 如在每个 $x_n\xrightarrow{M}0$ 的序列上有界，则必连续；

(c) X 上的线性泛函集合 E，如果在每一个 $x_n\xrightarrow{M}0$ 的序列

上一致有界，则必等度连续；

(*d*) X 是 Mackey 空间，并且任一线性泛函如在 $x_n \xrightarrow{M} 0$ 的序列上有界，则必连续；

(*e*) X 是 Mackey 空间，并且 X' 关于在 $x_n \xrightarrow{M} 0$ 的序列上一致收敛拓扑是完备的。

证　(*a*)⇒(*b*)：(*a*)相当于任一拟范数在每个有界集上有界必连续。如 $p(x)$ 在每个 $x_n \xrightarrow{M} 0$ 的序列上有界，$p(x)$ 在 X_B 中在 0 点连续，所以在其单位球 B 上有界，由(*a*)知 $p(x)$ 是连续的。

(*b*)⇒(*a*)是平凡的。

(*b*)⇒(*c*)：令 $p(x)=\sup\limits_{f\in E}|\langle x, f\rangle|$，则 $p(x)$ 满足(*b*)中的条件，所以是连续的，即知 E 等度连续。

(*c*)⇒(*d*)：由(*c*)知 X' 中的每个强有界集必等度连续，由定理 3 的(*e*)知X是拟桶式空间，从而是 Mackey 空间。

(*d*)⇒(*b*)：设拟范数 $p(x)$ 在每个 $x_n \xrightarrow{M} 0$ 上有界。令

$$E=\{f\in X^*\,\big|\,|\langle x, f\rangle|\leqslant p(x)\},\tag{3}$$

按 Hahn-Banach 定理知：

$$p(x)=\sup_{f\in E}|\langle x, f\rangle|.\tag{4}$$

由(3)知 E 在每个 $x_n \xrightarrow{M} 0$ 的序列上一致有界，根据(*d*)，每个 $f\in E$ 是连续的。由于 E 是 X' 中的 $\sigma(X', X)$ 有界集，根据(3)式容易知 E 是 $\sigma(X', X)$ 完备的，所以 E 是 X' 中均衡凸弱*紧集。因为 X 是 Mackey 空间，所以由(4)，$p(x)$ 是连续拟范数。

(*d*)⇒(*e*)：可以直接验证。

(*e*)⇒(*d*)：按 Grothendieck 完备性定理，X 上的线性泛函 f，如果在每个 $(\Gamma\{x_n\})^-_X$ 上 $\sigma(X, X')$ 连续，则 $f\in X'$，其中 $\{x_n\}$ 是 $\xrightarrow{M} 0$ 的序列。如果 f^* 是 X 上的线性泛函，在每个 $x_n \xrightarrow{M} 0$ 的序列上有界，则对于 X 中的任一均衡凸闭有界子集 B，f^* 在 X_B 上连续。为要证明 f^* 是连续的，只要证明 f^* 在每个 $[A]^-_X=[\Gamma\{x_n\}]^-_X$ 上是 $\sigma(X, X')$ 连续的，其中 $x_n \xrightarrow{M} 0$。

设 B 是 X 中的均衡凸闭有界子集，$\{x_n\}\subset X_B$，且 x_n 按 X_B 中的范数拓扑收敛于 0。由于 $\{x_n\}$ 是 X_B 中的完全有界集，$A=\Gamma\{x_n\}$ 也是 X_B 中的完全有界集。因 B 是弱闭集，所以 $\sigma(X, X')$ 在 X_B 上的限制和 X_B 上的范数拓扑满足第一章 §5 中的定理 2 中的条件。于是恒等嵌入映照 $I: X_B\to(X_B)_\sigma$ 可连续地延拓为 $\tilde{I}: \tilde{X}_B\to(X_B)_\sigma^\sim$，$\tilde{I}$ 是一一映照。由于 A 在 $\tilde{X}_B$ 中的闭包 $[A]^-_{\tilde{X}_B}$ 是紧集，经 $\tilde{I}$ 映照为 $(X_B)_\sigma^\sim$ 中的紧集，所以 $[A]^-_{\tilde{X}_B}=[A]^-_{(X_B)_\sigma^\sim}$。因此，$A$ 在 X_B 中的闭包 $[A]^-_{X_B}=[A]^-_{\tilde{X}_B}\cap X_B$ 和 $[A]^-_{(X_B)_\sigma}=[A]^-_{(X_B)_\sigma^\sim}\cap X_B$ 是一致的。因为对于某个 $\lambda>0$，$A\subset\lambda B$，λB 是 X 中的弱闭子集，所以 $[A]^-_{(X_B)_\sigma}=[A]^-_{X_\sigma}=[A]^-_X$。

又由于在 $\tilde{X}_B$ 中的紧集 $[A]^-_{\tilde{X}_B}$ 上的范数拓扑和 $(X_B)_\sigma^\sim$ 上的拓扑一致，所以在 $[A]^-_X$ 上的范数拓扑和 $\sigma(X, X')$ 拓扑一致。由 f^* 在 X_B 上是连续的，即知 f^* 在 $[A]^-_X$ 上是 $\sigma(X, X')$ 连续的。证毕。

根据定理 10(e) 即得下述定理：

定理 11 设 X 是囿空间，那末 X' 按 $\beta(X', X)$ 是完备的。

我们已经知道囿空间的归纳拓扑是囿空间，特别是，囿空间的商空间以及归纳极限是囿空间。还可证明至多可数多个囿空间的拓扑积是囿空间。

三、自反空间

设 (X, T) 是局部凸空间，在 X' 上赋以强拓扑 $\beta(X', X)$，称为 X 的强对偶。在本小节中，总假定 X' 为强对偶。X' 的强对偶记为 X''。称为 X 的两次共轭空间。我们可以定义 X 到 X'' 的自然嵌入映照 $I: x\mapsto\hat{x}$，其中

$$\hat{x}(f)=f(x),\ f\in X'.$$

事实上，$\hat{x}(f)$ 是 X' 上的线性泛函，它关于 $\sigma(X', X)$ 拓扑是连续的，由于 $\beta(X', X)\supset\sigma(X', X)$，$\hat{x}\in X''$。容易知道 I 是一一的。

当 X 是赋范空间时，在自然嵌入映照下，X 范数同构于 X'' 的子空间，所以 X 可看作 X'' 的子空间。但是当 X 是一般局部凸空间时，X'' 上的拓扑 $\beta(X'', X')$ 在 X 上的限制和 X 上原来的拓扑一般

不相等。实际上，如在 X 上取关于对偶 $\langle X, X'\rangle$ 的不同的相容拓扑，其对应的 X'' 都是一样的，甚至 $I: x\mapsto\hat{x}$ 看作 $X\to X''$ 的映照可以不连续。因此，必须搞清楚什么时候 I 是连续的、$X''=X$ 以及 $X''=X$ 且其上拓扑相一致的条件。

引理 1　设 (X, T) 是局部凸空间，则 X 到 X'' 的自然嵌入映照 I 是(相对)开映照。

证　考虑自然对偶 $\langle X', X''\rangle$，根据定义，$(X', \beta(X', X))'=X''$。所以 $\beta(X', X)$ 是 X' 上的相容拓扑。X' 上的 $\sigma(X', X'')$ 有界集全体即是 $\beta(X', X)$ 有界集全体。设 X' 中的 $\beta(X', X)$ 有界集全体为 $\mathscr{A}$，则 X'' 上的强拓扑是 $\mathscr{A}$ 上一致收敛拓扑 $T_{\mathscr{A}}$，其 0 的环境基由 $\{[A]^0_{X''}, A\in\mathscr{A}\}$ 组成。所以在 X 上的限制 $\beta(X'', X')|_X$ 其 0 点环境基由 $\{[A]^0_{X''}\cap X, A\in\mathscr{A}\}=\{[A]^0_X, A\in\mathscr{A}\}$ 组成。另一方面，(X, T) 有一个以桶 U 组成的局部基。因为 U^0 是 X' 中的 $\beta(X', X)$ 有界集，所以 $U=U^{00}\in\mathscr{N}(\beta(X'', X')|_X)$。由此即知 $T\subset\beta(X'', X')|_X$，$I$ 是相对开映照。

定理 12　局部凸空间 (X, T) 到 $(X'_\beta)'_\beta$ 的自然嵌入映照 I 是连续的充要条件为：X 是拟桶式空间。

证　根据引理 1，$\beta(X'', X')|_X$ 的局部基为 $\{[A]^0_X, A\in\mathscr{A}\}$，即是 X 上的 $\beta^*(X, X')$ 拓扑。如果 X 到 $(X'_\beta)'_\beta$ 的自然嵌入 I 是连续的，则每个 $[A]^0_X$ 是 X 中 0 的环境，X' 中的每个 $\beta(X', X)$ 有界集是等度连续的。根据定理 4 的 (e) 即知 X 是拟桶式空间。反之，若 (X, T) 是拟桶式空间，则 $T=\beta^*(X, X')$，即知 I 是连续的。证毕。

系　如果 X 是拟桶式空间，则 $I: X\to X\subset(X'_\beta)'_\beta$ 是拓扑同胚映照。

定理 13　设 X 是拟桶式空间，则 $\{[[U]^0_{X'}]^0_{X''}, U\in\mathscr{N}(X)\}$ 是 X'' 中 0 的一组环境基。

证　设 $U\in\mathscr{N}(X)$，则 $[U]^0_{X'}$ 是 $\beta(X', X)$ 有界集，从而 $[[U]^0_{X'}]^0_{X''}\in\mathscr{N}(X'')$。反之，设 $V\in\mathscr{N}(X'')$，$V=[A]^0_{X''}$，其中 A 是 $\beta(X', X)$ 有界集。由于 X 是拟桶式的，故 A 是 X 上的等度连续集，$U=[A]^0_X\in\mathscr{N}(X)$，则 $[[U]^0_{X'}]^0_{X''}=[[[A]^0_X]^0_{X'}]^0_{X''}\subset[A]^0_{X''}=V$。由此得证。

定义 设(X, T)是局部凸空间，如果$X''=X$，即X到X''的自然嵌入的像是整个X''，则称X是半自反的。如果自然嵌入映照I是X到$(X'_\beta)'_\beta$上的拓扑同构，则称X是自反的。

根据定义，自反空间一定是半自反的。对于局部凸线性距离空间，特别是如果X是赋范空间时，若是半自反的，则必定是自反的。事实上，因为局部凸线性距离空间是囿空间，则必为拟桶式的，根据定理11的系知I: $X\to X''$是拓扑同胚映照。所以对于局部凸线性距离空间，自反和半自反是一致的。这就是为什么对于Banach空间的自反空间的概念用半自反空间的定义加以叙述。

还应指出：半自反概念只和对偶$\langle X, X'\rangle$有关。如果局部凸空间X是半自反的，则X赋以任一关于$\langle X, X'\rangle$的相容拓扑一定也是半自反的。对于对偶空间$\langle X, Y\rangle$，如果对于每个相容拓扑T，(X, T)是半自反的，就称$\langle X, Y\rangle$是半自反的。如果$(X, \tau(X, Y))$是桶式的，就称$\langle X, Y\rangle$是桶式的。

定理 14 对于对偶空间，下述条件是等价的：

(a) $\langle X, Y\rangle$是半自反的；

(b) $\beta(Y, X)$是相容拓扑，即$(Y, \beta(Y, X))'=X$；

(c) $\langle Y, X\rangle$是桶式的；

(d) $(X, \sigma(X, Y))$是有界完备的。

证 (a)$\Rightarrow$(b)：由定义知。(b)$\Longleftrightarrow$(c)：对于$\langle Y, X\rangle$，$\beta(Y, X)$是Y上的最强可允许拓扑。$\beta(Y, X)$是相容拓扑的充要条件为$\beta(Y, X)=\tau(Y, X)$。根据定理2，充要条件为$(Y, \tau(Y, X))$是桶式空间。同时由定理2的(f)，$(Y, \tau(Y, X))$是桶式空间的充要条件为$(X, \sigma(X, Y))$是有界完备的，即(c)$\Longleftrightarrow$(d)。证毕。

推论 每个半自反空间是有界完备的。

证 由定理14的(d)及§4中的定理4即知。

下面我们把定理14的(d)表达为大家熟悉的形式：

定理 15 局部凸空间X是半自反的充要条件为：X中的每个有界集是相对弱紧的。

证 必要性：设X是半自反的，$X''=X$，则在映照I: $x\to\hat{x}$下

$(X, \sigma(X, X'))$ 和 $(X'', \sigma(X'', X))$ 拓扑同构。不妨设 B 是 X 中的均衡凸闭有界集，根据双极定理，$\hat{B}=(\hat{B}^0)^0$，而 $V=\hat{B}^0=\{f\in X' \mid \sup_{x\in B}|\langle f, x\rangle|\leqslant 1\}$ 是 X' 中 0 的强拓扑环境。由 Alaoglu-Bourbaki 定理，$\hat{B}$ 是 $\sigma(X'', X')$ 紧集，即知 B 是 $\sigma(X, X')$ 紧集。X 中的每个有界集是相对弱紧的。

充分性：因为 X 中的每个有界集是相对弱紧的，X 中的每个均衡凸闭有界子集是弱紧的。由 §5 中的 Mackey-Arens 定理知 $\beta(X', X)$ 是相容拓扑。所以 $(X', \beta(X', X))'=X$，X 是半自反的。证毕。

系 Banach 空间 X 是自反的充要条件为它的单位球 $V=\{x \mid \|x\|\leqslant 1\}$ 是弱紧的。

下述例子说明定理 14(d) 中有界完备的条件不能减弱为弱序列完备。

例 2 l_1 空间中的每个弱收敛序列必是强收敛的，所以 l_1 是弱序列完备的，但是 l_1 不是自反空间。

下面是一个介于两个可允许拓扑间的非可允许拓扑的例子：

例 3 设 X 是非自反的 Banach 空间。关于对偶 $\langle X, X'\rangle$，$\sigma^*=\sigma(X', X)$ 和强拓扑 $\beta(X', X)$ 是两个可允许拓扑，$\sigma(X', X)\subset\sigma(X', X'')\subset\beta(X', X)$，但是 $\sigma(X', X'')$ 关于 $\langle X, X'\rangle$ 不是可允许拓扑。事实上，因为 X 是桶式空间，X' 关于 $\sigma(X', X)$ 是有界完备的。但因 X 为非自反空间，所以 X' 也不是自反的，所以根据定理 14 的 (d)，X' 关于 $\sigma(X', X'')$ 必不是有界完备的。由于 $\sigma(X', X)\subset\sigma(X', X'')$，我们可以知道 $\sigma(X', X'')$ 一定不是可允许拓扑。因为否则，根据 §4 中的定理 4，可推知 $\sigma(X', X'')$ 也是有界完备的。这和上述相矛盾。

按照定义，局部凸空间 X 称为自反的，是指：如果 $I: X\to(X'_\beta)'_\beta$ 是拓扑同构映照。根据定理 12 可知 X 是自反空间的充要条件为 X 是半自反的，并且是拟桶式空间。由于定理 14 的推论和性质 (I) 知自反空间必是桶式空间。由此得到自反空间的特征如下：

定理 16 局部凸空间 X 是自反的充要条件为 X 是桶式空间，

并且X中的每个有界集是相对弱紧的。

推论 1 自反空间的强对偶是自反空间。

证 设X是自反空间，则由于$\beta(X', X)=\tau(X', X)$，根据定理 14 的(c)，$(X', \beta(X', X))$是桶式空间。因X是桶式的，由定理 4 的(f)，X'中每个强有界集是相对$\sigma(X', X)$紧的。所以X'_β是自反的。证毕。

推论 1 的逆命题一般不成立。一般地，设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，如果$(X, \tau(X, Y))$是自反空间，则称$\langle X, Y\rangle$是自反的。下述定理关于X和Y是完全对称的。

定理 17 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间。下述条件都是等价的：

(a) $\langle X, Y\rangle$是自反的；

(b) $\langle Y, X\rangle$是自反的；

(c) $\langle X, Y\rangle$和$\langle Y, X\rangle$都是桶式的；

(d) $\langle X, Y\rangle$和$\langle Y, X\rangle$都是半自反的。

证 (a)⇒(c)：设$\tau(X, Y)$是自反的，由定理 16 知$(X, \tau(X, Y))$是桶式空间。又由定理 14 的(c)知$\langle Y, X\rangle$是桶式的。

(c)⇒(a)：由于$\langle Y, X\rangle$是桶式的，所以$\langle X, Y\rangle$是半自反的。又因$\langle X, Y\rangle$是桶式空间，由定理 16 即知$\langle X, Y\rangle$是自反的。

同样可证(b)⟺(c)。(a)和(b)明显地包含(d)。(d)⇒(c)：由定理 14 即得。证毕。

推论 设X是局部凸空间，则$(X, \tau(X, X'))$是自反的充要条件为$(X', \tau(X', X))$是自反的。

四、Montel 空间

定义 局部凸空间X为半 Montel 空间是指：如果X中的每一个有界集是相对紧的。半 Montel 空间且是桶式的称为 Montel 空间。

由于每个弱闭集是闭的，紧集是弱紧的。由此即知：

(VII) 半 Montel 空间是半自反的；Montel 空间是自反的。

定理 17 对于局部凸空间(X, T)，下述条件是等价的：

(a) X中的每个有界集是完全有界集；

(b) 在X中的每个有界集 B 上，T 和 $\sigma(X, X')$ 一致；

(c) X' 中的每个等度连续集合 E 按强拓扑 $\beta(X', X)$ 是相对紧的（或是完全有界的）；

(d) 在 X' 中的每个等度连续集合 E 上，$\beta(X', X)$ 和 $\sigma(X', X)$ 一致。

证 (a)⇒(d)：由(a)，X' 上的强拓扑 $\beta(X', X)$ 和完全有界集上的一致收敛拓扑 T_c 是一致的。而由 §6 中的定理 6，在 X' 中，每个等度连续集合 E 上，T_c 和 $\sigma(X', X)$ 是一致的。

(d)⇒(c)：按 Alaoglu-Bourbaki 定理，每个等度连续集合 E 关于 $\sigma(X', X)$ 拓扑是相对紧的，从而关于 $\beta(X', X)$ 也是相对紧的。

(c)⇒(b)：局部凸空间X中的每个有界集 B，由于 $B \subset [[B]^0_{X'}]^0_{X''}$，可以看作 $(X'_\beta)'$ 中的等度连续集合，因而由 §6 中的定理 6 可知道，在 X 中的每个有界集 B 上，弱拓扑 $\sigma(X, X')$ 和关于 $\beta(X', X)$ 的完全有界集上的一致收敛拓扑 $\beta(X', X)^\theta$ 是相一致的。由于 X 上的拓扑 T 等于 X' 中等度连续集上的一致收敛拓扑。由条件(c)知 $T \subset \beta(X', X)^\theta$。所以在每个有界集 B 上，T 和 $\sigma(X, X')$ 是一致的。

(b)⇒(a)：只要注意到局部凸空间X中的每个有界集是 $\sigma(X, X')$ 有界的，从而是 $\sigma(X, X')$ 完全有界的。

推论 1 设局部凸空间 X 满足定理 17 的条件（例如X是半 Montel 空间），则X中的序列 x_n 收敛的充要条件为 x_n 是弱收敛的。

证 因为弱收敛序列是有界的，根据定理 17 的(b)即知。

推论 2 设X是 Montel 空间，则在 X' 中的每个等度连续集合上，$\beta(X', X)$ 和 $\sigma(X', X)$ 是一致的。特别是，对于 X' 中的序列，强收敛和弱*收敛是一致的。即 $f_n \xrightarrow{\sigma(X', X)} f$ 的充要条件为 $f_n \xrightarrow{\beta(X', X)} f$。

证 因为弱*收敛序列是弱*有界的。因为X是 Montel 空间，所以是桶式空间，弱*有界集是等度连续的。证毕。

定理 18 Motel 空间X的强对偶 X' 是 Montel 空间。

证 因为X'是自反空间，X'是桶式空间，并且X'中的每个有界集是等度连续集合。根据定理 17 的 (c) 知X'中的每个有界集是相对紧的。即知X'是 Montel 空间。证毕。

定理 19 完备的 Montel 空间增序列的严格归纳极限是 Montel 空间。

证 设E是$\{E_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$的严格归纳极限。E_i是完备的 Montel 空间，则每个E_n是E_{n+1}中的闭集。令A是E中的一个有界集，由第二章 §6 中的定理 12 知道，存在某个自然数n_0，使得$A\subset E_{n_0}$，并且A在E_{n_0}中有界。因为E_{n_0}是 Montel 空间，所以A是E_{n_0}中的相对紧集。又因为E_{n_0}到E内的恒等映照是连续的，所以A在E内也是相对紧的。又由第二章 §6 中的定理 6 知E是桶式空间。即知E是 Montel 空间。

在第四章 §9 中，我们可知道广义函数论中的基本空间 K、$\mathscr{S}$ 等都是 Montel 空间的重要特例。

五、可数(拟)桶式空间和(DF)空间

定义 局部凸空间X称为可数拟桶式的（相应地，可数桶式的），是指X满足下述条件：如果V_j是X中 0 的一列均衡凸闭环境，并且$V=\bigcap_{j=1}^{\infty} V_j$是吸收每个有界集的桶（相应地，是一个桶），则$V$必是 0 一个环境。

显然，每个(拟)桶式空间是可数(拟)桶式的。如果X是序列完备的，则"可数拟桶式的"与"可数桶式的"两个概念是一致的。

定义 局部凸空间X称为(DF)空间，是指：如果它满足下述两个条件：

(a) X 中存在一列有界集 $\{B_n\}$，使得X中的每个有界集包含在某个 B_{n_0} 之中；

(b) X 是可数拟桶式空间。

很清楚，每个赋范线性空间是(DF)空间。

(VIII) 每个(DF)空间的强对偶是 Frechet 空间。

证 由(DF)空间的条件 (a)，其强对偶是满足第一可列公理

的，从而是可距离化的。根据条件(b)，其强对偶是序列完备的。

(DF) 空间是由 Grothendieck 引进的。可以证明每个赋可列拟范空间X的强对偶X'是一个完备的(DF)空间。特别是，赋可列拟范空间X的两次强对偶X''是 Frechet 空间。这也是(DF)空间名称的由来。下面举出(DF)空间的一些性质：

(IX) (DF)空间X中的均衡凸集W是X中0的环境的充要条件为：对于X中的每个均衡凸有界子集B，$W\cap B$是B中0的环境。

证 设$\{B_n\}_{n\in N}$是X中的有界集的基本集族，不妨假定对每个$n\in N$，$B_n\subset B_{n+1}$，且每个B_n是均衡凸的。设W是X中的均衡凸有界子集。$W\cap B_n$是B_n中0的环境，则对于每个n，存在X中0的均衡凸环境W_n，使得

$$W_n\cap B_n\subset W\cap B_n.$$

我们令$V_n=\left[W\cap B_n+\frac{1}{2}W_n\right]^-$，则$V_n\subset W\cap B_n+W_n$。因此

$$\begin{aligned}V_n\cap B_n&\subset W\cap B_n+W_n\cap 2B_n\subset W\cap B_n+2(W_n\cap B_n)\\&\subset 3(W\cap B_n).\end{aligned}$$

令$S=\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n$，则$S\cap B_n\subset 3(W\cap B_n)$，因此

$$S=\bigcup_{n=1}^{\infty}S\cap B_n\subset 3W\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}3B_n\right)=3W.$$

由所作，S是均衡凸闭集。此外，对每个n，存在$\lambda_n>0$，使

$$B_n\subset\lambda_n(W_n\cap B_n).$$

所以$B_n\subset\lambda_nV_{n+k}(k=1,2,\cdots)$。由此桶$S$吸收$B_n$，从而吸收每个有界集。根据$X$是($DF$)空间，必是可数拟桶式的，所以$S$是$X$中0的环境，由$\frac{1}{3}S\subset W$知$W$是$X$中0点的环境。证毕。

推论 1 设T是(DF)空间X到局部凸空间Y的线性映照，则T是连续的充要条件为：T在X中的任一有界集上的限制是连续的。

(X) 设V_n是(DF)空间X中0的一列环境，则存在0的环境V，V被每个V_n吸收。

证 不妨假定 V_n 是均衡凸闭的。则 $A_n=[V_n]^0_{X'}$ 是 Frechet 空间 X'_β 中的等度连续集合，从而是有界的。设 $\{p_n(f)\}$ 是 X'_β 上的一组连续拟范数基。不妨设 p_n 是递增的。设 $M_j^n=\sup\limits_{f\in A_j} p_n(f)$，取 $\lambda_n>0$，使得 $\lambda_n M_n^n\leqslant 1$。令 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n A_n$，则当 $x\in A$ 时，

$$p_n(x)\leqslant \sup_j \lambda_j M_j^n\leqslant \max\{\lambda_1 M_1^n,\cdots,\lambda_{n-1}M_{n-1}^n,1\}<\infty.$$

所以 A 是 X'_β 中的强有界集。设 $V=[A]^0_X$，则 V 吸收 X 中的每个有界集，且 $V=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}V_n$。由于 X 是可数拟桶式的，V 是 X 中 0 的环境，且 V 被每个 V_n 所吸收。证毕。

习 题 三

1．设〈X,Y〉是对偶空间，试证明：界于两个相容拓扑之间的局部凸向量拓扑是相容拓扑。

2．设〈X,Y〉是对偶空间，S 是 X 的子空间，试证明：$\sigma(X,Y)|_S=\sigma(S,Y)$。

3．设 X 是赋范空间，试证明：X 上的 $\sigma(X,X')$、$\sigma(X'',X')|_X$ 和 $\sigma(X'',X''')|_X$ 都是一样的。

4．设线性空间 X 上有两个向量拓扑 T 和 T'，使 $(X,T_1)'\supset(X,T)'$，又设 T 是局部凸的，试证明：每个 T 拓扑闭的凸集是 T_1 拓扑闭的。

5．设 X 是所有点列 $x=(x_i)(i\in N)$ 的全体，Y 是仅有有限个项不为 0 的点列 $y=(y_i)$ 全体，定义双线性泛函 $\langle x,y\rangle=\sum x_i y_i$，则〈$X,Y$〉是对偶空间。试证明：$X$ 上 $\sigma(X,Y)$ 拓扑由拟范数族 $\{p_n(x)=x_n,\ n\in N\}$ 决定，从而是可距离化的。

6．试证明：l^1 上弱拓扑是序列完备，但不是完备的。

7．设 X 是 Banach 空间，试证明：在 $(X^*,\sigma(X^*,X))$ 中，X' 是稠密的，并且是序列闭的。

8．设〈X,Y〉是对偶空间，试证明：$(Y,\sigma(Y,X))$ 是完备的充要条件为 $Y=X^*$。

9．设 X 是分离的局部凸空间，试证明：X 是弱完备的充要条件为 $X=X'^*$。

10．如果线性空间 X 上的两个向量拓扑有相同的闭凸集，则必有相同的

对偶(即连续线性泛函是一样的)。

11. 证明 $A^0\cup B^0\subset(A\cap B)^0$。

12. 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$A\subset X$，$B\subset Y$。试证明：$A\subset B^0$ 的充要条件为 $B\subset A^0$。更一般地，B^0 吸收 A 的充要条件为 A^0 吸收 B。

13. 设 X 是赋范空间，$U=\{f\in X' \mid \|f\|\leqslant e\}$，$A=\{x \mid \|x\|\leqslant 1/e\}$。试证明：$U=A^0$。

14. 设 X 是分离的局部凸空间。试证明：X' 上的弱*拓扑可距离化的充要条件为 X 有可数 Hamel 基(应注意：对于不满足分离性的局部凸空间，结论不成立)。

15. 设 X 是无限维局部凸 Frechet 空间。试证明 $(X', \sigma(X', X))$ 不可距离化。

16. 设 X 是赋范空间，考虑自然对偶 $\langle X, X'\rangle$，取 $\mathscr{B}=\{nD, n\in N\}$，其中 $D=\{f\in X' \mid \|f\|\leqslant 1\}$。试证明：$X$ 上的 $T_{\mathscr{B}}$ 拓扑就是范数拓扑。

17. 设 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 是饱和集族，试证明：$T_{\mathscr{A}\cup\mathscr{B}}=T_{\mathscr{A}}\vee T_{\mathscr{B}}$，$T_{\mathscr{A}\cap\mathscr{B}}=T_{\mathscr{A}}\wedge T_{\mathscr{B}}$。

18. 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，并设 X 中的子集 A 是 $\beta(X, Y)$ 拓扑有界集，试证明：A^{00} 也是 $\beta(X, Y)$ 有界的。

19. 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，T 是 X 上的向量拓扑，$S\subset Y$。试证明：S 是 T 拓扑等度连续的充要条件为 $S^0\in\mathscr{N}(T)$。

20. 设 X 是赋范空间，$S\subset X'$。试证明：S 是等度连续的充要条件为 S 是范数有界的。

21. 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$S\subset Y$，$\mathscr{A}$ 是 Y 中由有界集组成的饱和集族，试证明：S 是 $T_{\mathscr{A}}$ 拓扑等度连续的充要条件为 $S\in\mathscr{A}$。

22. 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，T 是 X 上的向量拓扑，$S\subset X$，试证明：S^0 是 T 拓扑等度连续的充要条件为 $S^{00}\in\mathscr{N}(T)$。

23. 试证明：等度连续性不是对偶不变的。

24. 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$\mathscr{A}$ 是 Y 中的有界子集族，并且满足条件：a) 对 A_1、$A_2\in\mathscr{A}$，存在 $A_3\in\mathscr{A}$，使 $A_3\supset A_1\cup A_2$；b) 对 $A\in\mathscr{A}$，存在 $B\in\mathscr{A}$，使 $B\supset 2A$。试证明：$T_{\mathscr{A}}$ 是可允许拓扑的充要条件为 $\bigcup\{A^{00} \mid A\in\mathscr{A}\}=Y$。

25. 设 X 是线性空间，试证明：$\sigma(X^*, X)=\beta(X^*, X)$，即 X^* 上关于对偶 $\langle X^*, X\rangle$，仅有一个可允许拓扑。

26. 设 (X, T) 是局部凸线性距离空间，并且不完备。试证明：X 上关于对偶 $\langle X, X'\rangle$ 的任何相容拓扑，都不是序列完备的。

27. 试给出分离的但不是可允许拓扑的一致收敛拓扑 $T_{\mathscr{A}}$。

28. 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$\mathscr{A}$ 是 Y 上的可允许饱和集族。令 $T=T_{\mathscr{A}}$，考虑对偶 $\langle X, X^*\rangle$。试证明：$(X, T)'=\bigcup\{[[A]_X^0]_{X^*}^0 \mid A\in\mathscr{A}\}$（首先 $Y\subset X^*$，其次因为线性泛函是连续的充要条件为在 0 的一个环境上有界）。

29. 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，$\mathscr{A}$ 是 Y 中饱和的可允许集族，试证明：$T_{\mathscr{A}}$ 是相容拓扑的充要条件为 $\mathscr{A}$ 中每个集是 $\sigma(Y, X)$ 拓扑相对紧的。

30. 设 $\langle l^1, l^\infty\rangle$ 是自然对偶的。试证明，对于 l^1 上所有可允许拓扑有相同的紧子集。

31. 设局部凸空间 X 是可分的。试证明：X 关于任一对偶 $\langle X, X'\rangle$ 的相容拓扑也是可分的。

32. 设 X 是局部凸空间，H 是 X 的子空间，则 $H'=X'/H^\perp$。令 $\theta: X'\to X'/H^\perp$ 为典型映照。考虑自然对偶 $\langle X, X'\rangle$，设 $\mathscr{B}$ 是 X' 中由 $\sigma(X', X)$ 有界集组成的饱和集族，则 X 上可定义一致收敛拓扑 $T_{\mathscr{B}}$。同时考虑对偶 $\langle H, H'\rangle$，令 $\hat{\mathscr{B}}=\theta(\mathscr{B})$，对 H' 中的集族 $\hat{\mathscr{B}}$ 可定义 H 上的一致收敛拓扑 $T_{\hat{\mathscr{B}}}$，试证明：$T_{\mathscr{B}}|_H=T_{\hat{\mathscr{B}}}$。特别是，在 H 上 $\sigma(X, X')$ 和 $\sigma(H, H')$ 是一致的。

33. 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间。试证明：$(Y, \sigma(Y, X))$ 是完备的充要条件为 $Y=X^*$。

34. 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，U 是 X 中均衡凸闭集。试证明：下述条件是等价的：

a) $U\in\mathscr{N}(T)$，对某相容拓扑；

b) $U\in\mathscr{N}(\tau(X, Y))$；

c) U^0 是 $\sigma(Y, X)$ 紧的。

35. 设 X 是局部凸空间，$S\subset X$ 是均衡凸闭子集，并且 S^0 是 $\sigma(X', X)$ 紧的。设 $f\in X^*$，且在 S 上有界，试证明：$f\in X'$。

36. 设 X 是非自反的 Banach 空间。试证明：X 在 $(X'', \tau(X'', X'))$ 中是稠密的。因此，$\tau(X'', X')|_X\neq\tau(X, X')$，这说明 Mackey 空间的稠密子空间可以不是 Mackey 空间。

37. 试证明局部凸空间 $(X, \sigma(X, X^*))$ 上的每个拟范数是序列连续的（因由 $X'=X^*$ 知，每个收敛序列是有限维的）。

38. 设 X 是无限维线性空间。试证明：局部凸空间 $(X, \sigma(X, X^*))$ 上的每个范数是序列连续但不是连续的（因为 0 的每个 $\sigma(X, X^*)$ 拓扑环境包含一个 co-有限维子空间）。

39. 设X是 Mazur 空间。试证明，如果把X上的拓扑改赋以关于$\langle X, X'\rangle$的较弱相容拓扑，则仍是 Mazur 空间。由此可以举出一个是 Mazur 空间，但不是囿空间的例。

40. 设X是局部凸空间，$S\subset X'$，如果 S^0 吸收每个有界集，试证明：S是 $\beta(X', X)$有界的。

41. 设X是 Banach-Mackey 空间，且是拟桶的。试证明：X是桶式空间。

42. 设X是可分完备的局部凸空间。试证明：X' 上的每个弱*序列连续线性泛函是弱*连续的(试应用 Grothendick 完备定理)。

43. 试证明：赋范空间X是自反的充要条件为每个 $f\in X''$ 是弱* 连续的。

44. 试证明：线性空间X上的最强局部凸拓扑是囿的。

45. 试证明无限维赋范空间上的弱拓扑不是囿的，从而不可距离化。

46. 试证明：局部凸距离空间X上有较强的性质：X中吸收每个有界集的集合(称为 bornivore)是 0 的环境，对于一般的囿空间不一定对。

47. 设X是桶式空间，试证明：X' 关于$\langle X', X\rangle$的每一个可允许拓扑是序列完备的。

48. 设X是桶式空间，并且 $X'\neq X^*$，试证明：X' 是$(X^*, \sigma(X^*, X))$中稠密的序列闭的子空间，$(X', \sigma(X', X))$是有界完备但不是完备的。

49. 设X是桶式空间，考虑自然对偶$\langle X, X'\rangle$。试证明：(X', T)对所有 X' 上的可允许拓扑T具有凸紧性。

50. 试举一个非完备赋范空间，但却是桶式空间的例子，说明对于桶式空间 X，$\beta(X, X')$不一定是完备的。

51. 设X是桶式空间，并且有 Schauder 基。试证明：X是 Mazur 空间(如 $x=\sum f_i(x)e_i$，F 是序列连续，则 $F(x)=\sum f_i(x)F(e_i)$，由X是桶式$\Rightarrow F$连续)。

52. 设X是非自反的 Banach 空间。试证明：$\langle X', X\rangle$是半自反的，但不是拟桶式的，而$\langle X, X'\rangle$是拟桶式的，但不是半自反的(称对偶空间$\langle X, Y\rangle$是拟桶式的，是指：如果$(X, \tau(X, Y))$是拟桶的)。

53. 试证明：$\tau(X, Y)=\beta(X, Y)$ 的充要条件为 $\langle Y, X\rangle$是半自反的。

54. 设X是赋范空间，X' 可分。试证明：X在 X'' 中弱*(指$\sigma(X'', X')$)序列是稠密的。由此推得：如果X是弱序列完备，并且有可分的共轭空间，则

赋范空间X是自反的。

55. 试证明半自反空间的闭子空间是半自反的。

56. 设X是有界完备的。试证明：$\langle X, X'\rangle$是自反的充要条件为$\langle X', X'\rangle$是自反的。

57. 设X是桶式空间，S是一个稠密子空间。试证明：S是桶式空间的充要条件为X'中的每个$\sigma(X', S)$有界集是等度连续的。

第四章　线性映照和核空间

§1　对偶算子和 Hellinger-Toeplitz 拓扑

设 X、Y 是线性空间。T 是 X 到 Y 的线性算子。X^* 和 Y^* 分别表示 X 和 Y 上的线性泛函全体。则对于给定的 T 可以定义一个 Y^* 到 X^* 的线性算子 $T^*: \varphi \mapsto T^*\varphi$:

$$(T^*\varphi)(x) = \varphi(Tx),\ x \in X.$$

现在设 $\langle X, X^\wedge\rangle$ 和 $\langle Y, Y^\wedge\rangle$ 是两组对偶空间，则 $X^\wedge \subset X^*$，$Y^\wedge \subset Y^*$。对于 X 到 Y 的线性算子 T，可以定义

$$T' = T^*|_{Y^\wedge}.$$

则 T' 是 $Y^\wedge$ 到 X^* 的线性算子。如果满足条件 $T'(Y^\wedge) \subset X^\wedge$，则称 $T': Y^\wedge \to X^\wedge$ 为 T 的对偶算子。

容易知道：T' 是 T 的对偶的充要条件为：对每一个 $x \in X$ 和 $\varphi \in Y^\wedge$，有

$$\langle Tx, \varphi\rangle = \langle x, T'\varphi\rangle. \tag{1}$$

由对偶算子的定义可知道 T' 和 T 的地位是对称的，即如果 T' 是 T 的对偶，则 T 也是 T' 的对偶，并且 $T'' = (T')' = T$。同时，由对偶空间的分离性的假设，对偶算子如果存在，则必是唯一的。

引理 1　设 $T' = T^*|_{Y^\wedge}$，则 $T(Y^\wedge) \subset X^\wedge$ 的充要条件为线性算子 $T: X \to Y$ 是 $\sigma(X, X^\wedge)$—$\sigma(Y, Y^\wedge)$ 连续的。

证　如果 $T'(Y^\wedge) \subset X^\wedge$，则由

$$\langle Tx, \varphi\rangle = \langle x, T'\varphi\rangle,\ x \in X,\ \varphi \in Y^\wedge,$$

即知 T 是 $\sigma(X, X^\wedge) - \sigma(Y, Y^\wedge)$ 连续的。

反之，设 T 是 $\sigma(X, X^\wedge) - \sigma(Y, Y^\wedge)$ 连续的。对任一 $\varphi \in Y^\wedge$，X 上的线性泛函 $x \mapsto \langle Tx, \varphi\rangle$ 是 $\sigma(X, X^\wedge)$ 连续的。根据对偶空间

弱连续线性泛函的表示定理，存在唯一的元 $T'\varphi \in X^\wedge$，使得

$$\langle Tx, \varphi\rangle = \langle x, T'\varphi\rangle.$$

所以 $T'(Y^\wedge) \subset X^\wedge$。证毕。

以后为方便起见，如果 T 是 $\sigma(X, X^\wedge) - \sigma(Y, Y^\wedge)$ 连续的，习惯上，称 T 是 σ-(弱)连续的。

定理 1 设 $\langle X, X^\wedge\rangle$、$\langle Y, Y^\wedge\rangle$ 分别是对偶空间。T 是 X 到 Y 的线性算子。那末算子 T 存在对偶算子 T' 的充要条件是 T 是 σ-连续的。如果 T 是 σ-连续的，那末 T' 必是 $\sigma(Y^\wedge, Y) - \sigma(X^\wedge, X)$ 连续。

证 由于 $(T')' = T$，根据引理 1 即得后一结论。

由定理 1 知道 T' 的存在性和 T 的 σ-连续性是等价的。

推论 1 设 $\langle X, X^\wedge\rangle$ 与 $\langle Y, Y^\wedge\rangle$ 分别是对偶空间，线性算子 Q: $Y^\wedge \to X^\wedge$，则存在线性算子 T: $X \to Y$，使得 $Q = T'$ 的充要条件为 Q 是 $\sigma(Y^\wedge, Y) - \sigma(X^\wedge, X)$ 连续的。

推论 2 设 X、Y 是局部凸空间，则线性算子 T: $X \to Y$ 是 σ-连续的充要条件为：存在对偶算子 T': $Y' \to X'$，使

$$\langle Tx, \varphi\rangle = \langle x, T'\varphi\rangle, \quad x \in X, \ \varphi \in Y',$$

并且 T 是 σ-连续的充要条件为 T' 是 σ^* 连续的。

在 X、Y 是局部凸空间的情形，T 的对偶算子 T' 也称为 T 的共轭算子，记为 T^*。如果在 X'、Y' 上取强拓扑，则 $T^{**} = (T^*)^*$，一般并不等于 T，但是有关系 $T^{**}|_X = T$。

推论 2 说明了一一对应 $T \to T'$ 是 σ-连续线性算子 T: $X \to Y$ 全体组成的线性空间和 σ^* 连续线性算子 T': $Y' \to X'$ 全体组成的线性空间之间的代数同构：

$$(aT + bS)' = aT' + bS'.$$

但是对于乘法，对应需交换次序。设 S 是 $Y \to Z$ 的 σ-连续线性算子，则

$$(ST)' = T'S'.$$

推论 3 设 X、Y 是局部凸空间，T 是 $X \to Y$ 的连续线性算子，则 T 必是 σ-连续的。从而存在对偶算子 T'。

证　只要证明对偶 T' 存在即可。设 $\varphi\in Y'$，则线性泛函 $f(x)=\langle Tx,\varphi\rangle$ 是 X 上的连续线性泛函，所以 $f\in X'$，即 $\langle Tx,\varphi\rangle=\langle x,f\rangle$，$f=T'\varphi$，对偶算子 T' 存在，根据定理 1 知，T 是 σ-连续的。证毕。

定理 2　设 X、Y 是局部凸空间，线性映照 $A:X\to Y$ 是 σ-连续的充要条件为：对于 Y 中的每一个闭的超平面 $H\ni 0$，其逆像 $A^{-1}(H)$ 是 X 中的闭集。

证　设 φ 是 Y 上的线性泛函，$H=\{y\mid\varphi(y)=0\}$，因为 H 是闭的，所以 $\varphi\in Y'$，则由

$$A^{-1}(H)=\{x\mid\varphi(Ax)=0\}=\{x\mid(A'\varphi)(x)=0\},$$

故 $A^{-1}(H)$ 是闭的充要条件为 $A'\varphi\in X'$，即等价于 A 是 σ-连续的。

下面给出一些运算性质：

定理 3　设 $\langle X,X^{\wedge}\rangle$、$\langle Y,Y^{\wedge}\rangle$ 是对偶空间，$T:X\to Y$ 是 σ-连续线性算子，T' 是 T 的对偶算子。$A\subset X$，$B\subset Y^{\wedge}$，则有

(a) $T(A)^0=(T')^{-1}(A^0)$；

(b) $T'(B)^0=T^{-1}(B^0)$；

(c) 如果 $T(A)\subset C\subset Y$，则 $T'(C^0)\subset A^0$。反之，如果 C 是均衡凸 $\sigma(Y,Y^{\wedge})$ 闭集，则由 $T'(C^0)\subset A^0\Rightarrow T(A)\subset C$；

(d) 如果 $C\subset T(X)$，则 $T'(C^0)=T^{-1}(C)^0\cap T'(Y^{\wedge})$。

证　(a) $T(A)^0=\{\varphi\in Y^{\wedge}\mid\sup\limits_{x\in A}|\langle Tx,\varphi\rangle|\leqslant 1\}$

$$=\{\varphi\mid\sup_{x\in A}|\langle x,T'\varphi\rangle|\leqslant 1\}$$

$$=\{\varphi\mid T'\varphi\in A^0\}=(T')^{-1}(A^0).$$

(b) 证明和(a)类似。

(c) 如果 $T(A)\subset C$，则 $C^0\subset T(A)^0=(T')^{-1}(A^0)$，两边作用 T'，得到 $T'(C^0)\subset T'(T')^{-1}(A^0)\subset A^0$。反之，设 C 是均衡凸弱闭集，并且 $T'(C^0)\subset A^0$，　则

$$T(A^{00})\subset T(T'(C^0)^0)=T(T^{-1}(C^{00}))\subset C^{00}=C.$$

即得 $T(A)\subset C$。

(d) 因为 $C^0=(T(T^{-1}(C)))^0=(T')^{-1}(T^{-1}(C)^0)$，两边作用 T'，得

$$T'(C^0)=T'(T')^{-1}(T^{-1}(C)^0)=T'(C)^0\cap T'(Y^\wedge).$$

如果记 $R(T)=\{Tx,\ x\in X\}$，$N(T)=\{x,\ Tx=0\}$，$R(T')=\{T'\varphi;\ \varphi\in Y^\wedge\}$，$N(T')=\{\varphi,\ T'\varphi=0\}$。考虑到对于线性空间 B，$B^0=B^\perp$，则有下述推论：

推论 1 设 X、Y 是局部凸空间，T：$X\to Y$ 是 σ-连续线性映照，则

(a) $N(T')=R(T)^\perp$；

(b) $R(T')^\perp=N(T)$；

(c) $N(T')^\perp=\overline{R(T)}$；

(d) $[R(T')]^-_{\sigma^*}=N(T)^\perp$。

证 (a)、(b)可由定理 2 中(a)、(b) 令 $A=X$ 或 $B=Y'$ 而得到。

(c) $N(T')^\perp=R(T)^{\perp\perp}=R(T)^{00}=\overline{R(T)}$。

(d) $N(T)^\perp=R(T')^{\perp\perp}=[R(T')]^-_{\sigma^*}$。证毕。

由此即得下述推论：

推论 2 设 X、Y 是局部凸空间，T：$X\to Y$ 是 σ-连续线性算子，则 T 是一一映照的充要条件为：T' 的值域在 X' 中 σ^* 稠密，或等价地，T' 的值域在 X 上是全的。

同样地，T' 是一一映照的充要条件为 $R(T)$ 在 Y 中是稠密的。

我们已经知道：连续线性算子一定是 σ-连续的。反过来，则不一定对。下述定理给出了 σ-连续线性算子是连续的条件，同时表明 σ-连续线性算子 T 的某些性质可以借助 T' 加以研究。

定理 4 设 $\langle X, X^\wedge\rangle$、$\langle Y, Y^\wedge\rangle$ 是对偶空间。$\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 分别是 $X^\wedge$、$Y^\wedge$ 中的均衡凸 $\sigma(X^\wedge, X)$、$\sigma(Y^\wedge, Y)$ 有界子集族，满足下述条件：如果 A_1、$A_2\in\mathscr{A}$（相应地 $\in\mathscr{B}$），则存在 $A_3\in\mathscr{A}$（相应地 $\in\mathscr{B}$）使得 A_3 吸收 $A_1\cup A_2$。

则 σ-连续线性映照 T：$X\to Y$ 是 $(X, T_{\mathscr{A}})\to(Y, T_{\mathscr{B}})$ 的连续映

照的充要条件为：对于每个$B\in\mathscr{B}$，必存在$A\in\mathscr{A}$和正数λ，使得

$$T'(B)\subset\lambda[A]^{-}_{\sigma(X^{\wedge},X)}.$$

证　由假设，$\{p^A, A\in\mathscr{A}\}$，$\{p^B, B\in\mathscr{B}\}$分别是$(X,T_{\mathscr{A}})$、$(Y,T_{\mathscr{B}})$中的连续拟范数基。因为T是σ–连续的，故对偶T'存在。T是$T_{\mathscr{A}}-T_{\mathscr{B}}$连续的充要条件为：对于每个$B\in\mathscr{B}$，存在$A\in\mathscr{A}$及$\lambda>0$，使

$$p^B(Tx)\leqslant\lambda p^A(x)=p^{\lambda A}(x);$$

而

$$p^B(Tx)=\sup_{\varphi\in B}|\langle Tx,\varphi\rangle|=\sup_{\varphi\in B}|\langle x,T'\varphi\rangle|=p^{T'(B)}(x),\ x\in X.$$

所以$p^{T'(B)}(x)\leqslant p^{\lambda A}(x)$，$(\lambda A)^0\subset T'(B)^0$。根据双极定理，$T'(B)\subset T'(B)^{00}\subset(\lambda A)^{00}=\lambda[A]^{-}_{\sigma(X^{\wedge},X)}$。证毕。

推论　设X、Y是局部凸空间，则σ–连续算子$T:X\to Y$连续的充要条件为T'把Y'中的每个等度连续集映成X'中的等度连续集。

证　由第三章§4中的定理2，X、Y上的局部凸拓扑即是在X'、Y'中的等度连续集上的一致收敛拓扑。只要取$\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$分别是X'、Y'中的等度连续均衡凸子集全体，则根据定理3即得。证毕。

对于任一对偶空间$\langle X, X^{\wedge}\rangle$，$X$上的任一可允许拓扑可以表示为$T_{\mathscr{A}}$，即$\mathscr{A}$上的一致收敛拓扑。其中$\mathscr{A}$是$X^{\wedge}$中的可允许集族。如果$\mathscr{A}$是$X^{\wedge}$中只和对偶有关的某些集类组成。例如$\sigma(X, X')$、$\mathscr{A}$可取$X^{\wedge}$中的由有限点集张成的饱和集族。对$\beta(X, X^{\wedge})$拓扑，$\mathscr{A}$可取$X^{\wedge}$中所有$\sigma(X^{\wedge}, X)$有界集全体。此时可以认为弱拓扑和强拓扑对所有对偶空间都有明确的意义。

定义　设X、Y是局部凸空间，考虑自然对偶$\langle X, X'\rangle$与$\langle Y, Y'\rangle$，α是某个对所有对偶空间都有意义的可允许拓扑。如果当线性映照$T: X\to Y$是连续时能推得T也是$\alpha(X, X')-\alpha(X, X')$连续的，则称$\alpha$为Hellinger-Toeplitz型拓扑。

根据定理1的推论3知弱拓扑σ是Hellinger-Toeplitz型拓

扑。下述定理说明了 Mackey 拓扑 τ 等都是 Hellinger-Toeplitz 型拓扑，它是定理 4 的直接推论。

定理 5 设 X、Y 是局部凸空间，$T: X\to Y$ 是连续(或 σ-连续)线性算子。则

(a) T 是 $\tau(X, X')-\tau(Y, Y')$，$\beta^*(X, X')-\beta^*(Y, Y')$，$\beta(X, X')-\beta(Y, Y')$连续的线性算子。

(b) T 的对偶算子 T' 是 $\sigma(Y', Y)-\sigma(X', X)$，$\tau(Y', Y)-\tau(X', X)$，$\beta(Y', Y)-\beta(X', X)$连续的。

证 只要讨论 T 是 σ-连续的情形。由定理 1 知，T' 是 σ^* 连续的，故 T' 把 Y' 中的均衡凸 $\sigma(Y', Y)$ 紧集映照到 X' 中的均衡凸 $\sigma(X', X)$紧集。根据定理 4 知，T 是 $\tau(Y, Y')-\tau(X, X')$ 连续的。

拟强拓扑 $\beta^*(X, X')=T_{\mathscr{A}_1}$，$\beta^*(Y, Y')=T_{\mathscr{B}_1}$，其中 $\mathscr{A}_1$、$\mathscr{B}_1$ 分别是 X'、Y' 中的强有界集全体。设均衡凸集 $B\in\mathscr{B}_1$。如要证明 T 是 $\beta^*(X, X')-\beta^*(Y, Y')$连续的，根据定理 3，只要证明 $T'B$ 是 X' 中的强有界集即可。设 C 是 X 中任一$\sigma(X, X')$有界集，则

$$\sup_{x\in C}|\langle x, T'B\rangle|=\sup_{x\in C}|\langle Tx, B\rangle|=\sup_{x\in TC}|\langle x, B\rangle|<\infty.$$

这是由于 T 是 σ-连续的，所以 TC 是 $\sigma(Y, Y')$ 有界集，又因为 B 是强有界集，所以上式成立。这就证明了 $T'B$ 是 X' 中的强有界集，T 是 $\beta^*(X, X')-\beta^*(Y, Y')$连续的。

定理的其余部分的证明是类似的，把它们留给读者完成。

推论 1 如果 T' 是 Mackey 连续的，则 T 是 Mackey 连续的。

设 H 是 Hilbert 空间，A 是 $H\to H$ 的线性算子。如果对任何 f、$g\in H$，均有 $(Af, g)=(f, Ag)$，则 A 是连续的。事实上，由条件知 A 是 σ-连续的。根据定理 5(a)，A 是 $\tau(H, H')-\tau(H, H')$ 连续的。由于 Hilbert 空间是 Mackey 空间，即 $\tau(H, H')$ 为 H 上的范数拓扑。这个结论首先由 Hellinger Toeplitz 所证明，定理 5 可以看作它的推广。

推论 2 设 X、Y 是赋范空间，则线性算子 $T: X\to Y$ 是 σ-连续

的充要条件为按范数拓扑是连续的。

推论 3　设 X 是 Mackey 空间，Y 是局部凸空间，则线性算子 $T: X\to Y$ 是连续的充要条件为 T 是 σ-连续的。

证　如果 T 是 σ-连续的，则 T 是 $\tau(X, X')-\tau(Y, Y')$ 连续的。由条件 $X=(X, \tau(X, X'))$，而 $(Y, \tau(Y, Y'))\to Y$ 总是连续的。则两个连续算子的乘积仍是连续的，即 $T: X\to Y$ 是连续的。证毕。

§2　局部凸空间的拓扑同态

设 X、Y 是局部凸线性拓扑空间。$A: X\to Y$ 是连续线性映照，如果对于 X 中的每个开集 G，其像 $A(G)$ 是 $A(X)$ 中的开集（其中 $A(X)$ 赋以由 Y 导出拓扑），则称 A 为拓扑同态 (topological homomorphism)。容易知道，连续线性映照 A 是拓扑同态的充要条件为相对开的。一对一的拓扑同态称为拓扑单调同态 (topological monomorphism)，如果进一步满足条件 $A(X)=Y$，则称 A 为拓扑同构。例如，对于 X 的任一子空间 Z，典型商映照 $Q: X\to X/Z$ 以及典型嵌入映照 $\Psi: Z\to X$ 都是拓扑同态映照。

设 X、Y 是局部凸空间，X 到 Y 的连续线性映照全体按通常的线性运算构成线性空间，记作 $\mathscr{L}(X, Y)$。借助于上述两个拓扑同态映照，每一个连续线性映照 $A\in\mathscr{L}(X, Y)$ 可以有下述的典型分解：

$$A=J\check{A}K, \tag{1}$$

其中 K 是 X 到 $X/N(A)$ 上的典型商映照，$\check{A}$ 是 $X/N(A)$ 到 $A(X)$ 上的一一连续线性映照，J 是 $A(X)$ 到 Y 的典型嵌入。如果用 $\hat{A}=J\check{A}$ 表示从 $X/N(A)$ 到 Y 中的一对一的连续线性映照，则有 $A=\hat{A}K$。

容易知道，如果 $A\in\mathscr{L}(X, Y)$ 是拓扑同态，则 $\hat{A}$ 是从 $X/N(A)$ 到 Y 的拓扑单调同态，而且 $\hat{A}=J\check{A}$，其中 $\check{A}$ 是从 $X/N(A)$ 到 $A(X)$ 上的拓扑同构。典型嵌入 $J: A(X)\to Y$ 总是拓扑单调同态。

(I) $A \in \mathscr{L}(X, Y)$是拓扑同态的充要条件为下述一个等价条件满足(a)$\check{A}$是拓扑同构;(b)$\hat{A}$是拓扑单调同态。

(II) 设X、Y是局部凸空间,线性映照$A: X \to Y$是拓扑同态,则$A'(Y')$是X'中σ^*闭集。

证 设f_0是$A'(Y')$在X'中关于弱*拓扑的接触点,则

$$f_0 \in [A'(Y')]^-_{\sigma(X', X)} = N(A)^0 = N(A)^{\perp}.$$

所以,如果$z \in N(A)$,则$f_0(z) = 0$,由此,在Y的子空间$A(X)$上可以如下唯一地定义一个线性泛函

$$l(Ax) = f_0(x), \quad x \in X.$$

下面先证l的连续性。令$U = \{x \mid |f_0(x)| < \varepsilon\}$,由$f_0 \in X'$,$U$是$X$中$0$的开环境。因为$A$是相对开的,$V = AU$是$A(X)$中的开集。由于当$y = Ax \in V$时,$|l(y)| = |l(Ax)| = |f_0(x)| < \varepsilon$,即知$l$是$AX$上的连续线性泛函。然后根据Hahn-Banach定理,存在$v_0 \in Y'$,使得$v_0(Ax) = l(Ax) = f_0(x)\,(x \in X)$,即知$f_0 = A'v_0 \in A'(Y')$,所以$A'(Y')$是$\sigma^*$闭的。证毕。

下面给出σ拓扑同态的对偶特征:

定理 1 设$\langle X, X^\wedge \rangle$、$\langle Y, Y^\wedge \rangle$是对偶空间,则从$X$到$Y$的线性映照$T$是$\sigma$-拓扑同态的充要条件为:$T$的对偶$T'$存在,并且$T'$的值域$R(T')$是$X^\wedge$中$\sigma(X^\wedge, X)$闭集。

证 首先注意线性映照T是σ-相对开的充要条件为对任一有限点集$A \subset X^\wedge$,存在有限点集$B \subset Y^\wedge$,使得

$$B^0 \cap T(X) \subset T(A^0).$$

与此等价地,即是满足$T^{-1}(B^0) \subset A^0 + T^{-1}(0)$。

充分性:设$R(T')$是$\sigma(X^\wedge, X)$闭的,A是$X^\wedge$中的有限点集,则A^{00}是$X^\wedge$中的有限维紧集,所以必存在$T'(Y^\wedge)$中的有限点集$T'(B)$,其中B是$Y^\wedge$中的有限点集,使得

$$A^{00} \cap T'(Y^\wedge) \subset T'(B)^{00}.$$

因为$T'(Y^\wedge)$是$\sigma(X^\wedge, X)$闭的,所以

$$T'(B)^0 \subset (A^0 \cup T'(Y^\wedge)^0)^{00} \subset [A^0 + T'(Y^\wedge)^0]^-_{\sigma(X, X^\wedge)}$$
$$= [A^0 + T^{-1}(0)]^-_{\sigma} \subset 2A^0 + T^{-1}(0).$$

根据 §1 中的定理 3，有

$$T^{-1}(B^0)\subset\left(\frac{1}{2}A\right)^0+T^{-1}(0).$$

所以 T 是 σ 相对开的。由 T' 存在可知道，T 是 σ-连续线性映照，即知 T 是 σ-拓扑同态。

必要性：由性质(II)即知。证毕。

推论 1 设 X、Y 是局部凸空间，线性映照 $T: X\to Y$ 是 σ-拓扑同态的充要条件为 T 的对偶 T' 存在，并且 $R(T')$ 是 σ^*-闭的。

由性质(II)和 §1 定理 1 的推论 3 可得到：

推论 2 局部凸空间 X 到局部凸空间 Y 的拓扑同态必定是 σ-拓扑同态。

推论 3 $A\in\mathscr{L}(X, Y)$ 是 σ-拓扑单调同态的充要条件为

$$A'(Y')=X'. \tag{2}$$

推论 4 局部凸空间 X 到局部凸空间 Y 的线性映照 A 是 σ-拓扑同态，并且 $R(A)$ 是 σ-闭的充要条件为对偶映照 A' 是 σ^*-拓扑同态，并且 $R(A')$ 是 σ^*-闭的。

证 设 A 是 σ-拓扑同态，并且 $R(A)$ 是 σ 闭的。根据定理 1，$R(A')$ 是 σ^* 闭的。由 A 的 σ-连续性可知道 A' 是 σ^*-连续的。因为 $(T')'=T$ 以及 $R(T)$ 是 σ-闭的，根据定理 1，T' 是 σ^*-拓扑同态。反过来的证明是一样的。证毕。

推论 5 A 是局部凸空间 X 到局部凸空间 Y 上的 σ-拓扑同构的充要条件为 A' 是 σ^*-拓扑同构。

证 如果 A 是 σ-拓扑同构，则 $R(A')$ 是 σ^*-闭的。又因 A 是一对一的，$N(A)=\{0\}$。所以 $R(A')=[R(A')]^-_{\sigma^*}=N(A)^\perp=X'$。另外，由 $R(A)=Y$ 知 A' 是 σ^* 拓扑同态，且 $N(A')=R(A)^\perp=\{0\}$，所以 A' 是一对一的。即知 A' 是 σ^*-拓扑同构。反过来，证明是一样的。证毕。

例 1 设 H 是局部凸空间 $(E, \mathscr{T})$ 的子空间。典型嵌入映照 $J: H\to E$ 是拓扑单调同态。由推论 3 可知 $J'(E')=H'$。如果把 H' 和 E'/H^0 不加区别，则 J' 是 $E'\to E'/H^0$ 上的典型映照。如果 H 是

闭的，则 J' 是 σ-拓扑同态。如果 H 不是闭的，则 J' 不是 σ-拓扑同态。

必须注意：拓扑同态的值域一般不一定是闭的。例如 E 是赋范空间，$\tilde{E}$ 是 E 的完备化扩张，并且 $E \neq \tilde{E}$。J：$E \to \tilde{E}$ 是典型嵌入映照，则 J 是拓扑单调同态。因为 $R(J) = E$ 在 $\tilde{E}$ 中是稠密的，而 $E \neq \tilde{E}$，所以 $R(J)$ 不是闭的。但是可得如下结论：

(III) 设 X，Y 是局部凸空间。A：$X \to Y$ 是拓扑同态。如果商空间 $X/N(A)$ 是完备的，则 $A(X)$ 是闭的。特别是，如果 X 是完备的，A 是拓扑单调同态，则 $A(X)$ 是闭的。

证 考虑 A 的典型分解。因为 $\check{A}$ 是 $X/N(A)$ 到 $A(X)$ 的拓扑同构，如果 $X/N(A)$ 是完备的，则 $A(X)$ 也是完备的，所以是闭的。

前面已经给出了 σ-拓扑同态的对偶特征。下面转入对一般拓扑同态的讨论。下面的拓扑同态定理是最重要的结果之一。

引理 1 设 $(X, \mathscr{T}_1)$、$(Y, \mathscr{T}_2)$ 是局部凸空间，A：$X \to Y$ 是 σ-拓扑同态。设 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 分别是 X'，Y' 中的等度连续集合全体。如果 A 是 $\mathscr{T}_1$-$\mathscr{T}_2$ 相对开的映照，则

$$A'(\mathscr{B}) \supset \mathscr{A} \cap A'(Y') = \{M_1 \in \mathscr{A} \mid M_1 \subset A'(Y')\}. \tag{3}$$

证 因为 A 是 σ-拓扑同态，$A'(Y')$ 是 σ^*-闭的。故只要对任一均衡凸 σ^*-闭集 $M_1 \in \mathscr{A} \cap A'(Y')$ 证明 $M_1 \in A'(\mathscr{B})$ 即可。

因为 M_1^0 是 X 中 0 的环境，由假设，A 是 $\mathscr{T}_1$-$\mathscr{T}_2$ 相对开的，$A(M_1^0)$ 必包含一个 $A(X)$ 中 0 的闭环境 $M_2^0 \cap A(X)$，其中 $M_2 \in \mathscr{B}$ 是 Y' 中均衡凸 σ^*-闭集

$$M_2^0 \cap A(X) \subset A(M_1^0)$$

作用 A^{-1} 得到

$$M_1^0 + N(A) \supset A^{-1}(M_2^0) = A'(M_2)^0.$$

因为 $M_1 \subset A'(Y')$，所以 $M_1^0 \supset A'(Y') = N(A)$，故

$$M_1^0 = M_1^0 + N(A) \supset A'(M_2)^0;$$

$$M_1 \subset [A'(M_2)]^{-}_{\sigma(X',X)}.$$

由 Alaoglu 定理，M_2 是 σ^*-紧的。由 A' 是 σ^*-连续的，$A'(M_2)$ 是 σ^*-闭的，即证明了 $M_1 \subset A'(M_2)$，$M_1 \in A'(\mathscr{B})$。证毕。

引理 2　设$(X,\mathscr{T}_1)$、$(Y,\mathscr{T}_2)$是局部凸空间，$A: X\to Y$ 是 σ-拓扑同态。如果 $A'(\mathscr{B})\supset\mathscr{A}\cap A'(Y')$，则$A$是$\mathscr{T}_1-\mathscr{T}_2$相对开的。

证　只要证明对于X中的每个0的环境U，存在Y中0的环境V，使 $A(U)\supset V\cap A(X)$ 即可。由于 $A(U+N(A))=A(U)$，所以不妨假设U是均衡凸闭的，并且包含 $N(A)$。

因 $U^0=M_1\in\mathscr{A}$，$M_1\subset N(A)^0=A'(Y')$，由假设存在$M_2\in\mathscr{B}$，使得 $M_1\subset A'(M_2)$。所以

$$M_1^0\supset A'(M_2)^0=A^{-1}(M_2^0);$$
$$A(U)=A(U^{00})=A(M_1^0)\supset M_2^0\cap A(X).$$

即说明A是$\mathscr{T}_1-\mathscr{T}_2$相对开的。证毕。

由此即得：

定理 2　[拓扑同态定理(Grothendieck)]　设X、Y是局部凸空间，$\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$分别是X'，Y'中的等度连续集合全体，$A\in\mathscr{L}(X,Y)$则A是拓扑同态的充要条件为满足条件：

(a)　$A'(Y')$在X'中是σ^*-闭的；

(b)　$A'(\mathscr{B})\supset\mathscr{A}\cap A'(Y')$。

推论　σ-拓扑同态 $A: X\to Y$ 是拓扑同态的充要条件为满足条件

$$A'(\mathscr{B})=\mathscr{A}\cap A'(Y').$$

证　因为σ-连续线性映照A是连续的充要条件为$A'(\mathscr{B})\subset\mathscr{A}$，故由定理2即得。

对于 Mackey 拓扑，进一步有如下结果：

定理 3　设$(X,\mathscr{T}_1)$是局部凸空间，$(Y,\mathscr{T}_2)$是 Mackey 空间，则

(a)　从X到Y上(满的)的连续线性映照A是拓扑同态(即开的)的充要条件为A是σ-拓扑同态(即σ-开的)。或等价地，$A'(Y')$是σ^*-闭的。

(b)　每个从X到Y上(满的)的σ-拓扑同态A必是满的Mackey拓扑同态。反之亦然。

证 (a)只要证充分性：设 A 是 $X\to Y$ 上的 σ-拓扑同态，则由定理 1 知，A' 是 $Y'\to A'(Y')$上的 σ^*-拓扑同构。如要证明 A 是拓扑同态，只要验证定理 2 的(b)。设 M_1 是 $A'(Y')$ 中的均衡凸 σ^*-紧子集。记 $M_2=(A')^{-1}(M_1)$，则 $M_1=A'(M_2)$。由于 A' 是 $Y'\to A'(Y')$上的 σ^*-拓扑同构，所以 M_2 是 Y' 中均衡凸 σ^*-紧子集。由于 $\mathscr{T}_2$ 是 Mackey 拓扑，$M_2\in\mathscr{B}$。由此 $\mathscr{A}\cap A'(Y')\subset A'(\mathscr{B})$。

(b) 如果 $\mathscr{T}_1$、$\mathscr{T}_2$ 都取 Mackey 拓扑。由于 σ-连续线性映照必 Mackey 连续。由(a)即得(b)。证毕。

推论 1 设 A：$X\to Y$ 是 σ-连续线性映照。则 A' 是 $Y'\to X'$上的 Mackey 拓扑同态的充要条件为，A 是 σ-拓扑单调同态，并且 $R(A)$是闭的。

证 根据定理 3 (b)，A' 是 $Y'\to X'$ 上的 Mackey 拓扑同态的充要条件为 A' 为 $Y'\to X'$ 上的 σ-拓扑同态。由定理 1 知充要条件为 A 是 σ-拓扑单调同态，并且 $R(A)$是闭的。

注意到在定理 3 中要求 $A(X)=Y$，这时相对开映照即为开映照。对于局部凸距离空间有下述结论：

推论 2 设 X、Y 是局部凸距离空间，$A\in\mathscr{L}(X,Y)$，则 A 为拓扑同态、σ-拓扑同态、Mackey 拓扑同态三者是一致的。

证 由于局部凸距离空间是 Mackey 空间，所以只要证明 σ-拓扑同态是拓扑同态。设 A 是 σ-拓扑同态。Y 在 $A(X)$ 上导出的局部凸拓扑也满足第一可列公理，故 $A(X)$是 Mackey 空间。把 A 看作 $X\to A(X)$上的 σ-拓扑同态，由定理 3 即知 A 是 $X\to A(X)$ 的拓扑同态，因而也是 $X\to Y$ 的拓扑同态。证毕。

我们知道，局部凸空间 X 上的拓扑关于自然对偶 $\langle X,X'\rangle$ 是相容拓扑。对于更一般的可允许拓扑可得下述定理：

定理 4 设 X、Y 是局部凸空间，$\langle X,X'\rangle$、$\langle Y,Y'\rangle$ 是自然对偶；$\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 分别是 X'、Y' 中的由 σ^*-有界集组成的可允许饱和集族。$A\in\mathscr{L}(X,Y)$。则 A 是 $(X,T_{\mathscr{A}})\to(Y,T_{\mathscr{B}})$的拓扑单调同态的充要条件为满足下述条件：

(a) $A'(\mathscr{B})\subset\mathscr{A}$；

(b) 对每一个 $M_1\in\mathscr{A}$，存在 $M_2\in\mathscr{B}$，使得 $M_1\subset[A'(M_2)]^{-}_{\sigma^*}$。

证 必要性：设 $A\in\mathscr{L}(X,Y)$ 是 $(X,T_{\mathscr{A}})\to(Y,T_{\mathscr{B}})$ 的拓扑单调同态，则 A 是 $T_{\mathscr{A}}-T_{\mathscr{B}}$ 连续的。由 §1 中的定理 4 即得(a)。因为 $\mathscr{A}$ 是饱和集族，不妨假定 M_1 是 $\mathscr{A}_1$ 中的均衡凸 σ^*-闭子集，因为 A 是 $T_{\mathscr{A}}-T_{\mathscr{B}}$ 相对开的，存在均衡凸 σ^*-闭子集 $M_2\in\mathscr{B}$，使

$$A(M_1^0)\supset M_2^0\cap A(X)。$$

则

$$M_1^0\supset A^{-1}(M_2^0)=A'(M_2)^0;$$
$$M_1=M_1^{00}\subset A'(M_2)^{00}=[A'(M_2)]^{-}_{\sigma^*}。$$

即推得(b)。

充分性：由(a)知 A 是 $T_{\mathscr{A}}-T_{\mathscr{B}}$ 连续的。根据(b)，有

$$\bigcup_{M_2\in\mathscr{B}}[A'(M)]^{-}_{\sigma^*}\supset\bigcup_{M_1\in\mathscr{A}}M_1=X'。$$

得到 $[A'(Y')]^{-}_{\sigma^*}=X'$，所以 A 是一对一的。下面证明 A 是 $T_{\mathscr{A}}-T_{\mathscr{B}}$ 相对开的：

设 $M_1\in\mathscr{A}$，由(b)，必存在 $M_2\in\mathscr{B}$，使得

$$M_1\subset[A'(M_2)]^{-}_{\sigma^*}。$$

则

$$M_1^0\supset A'(M_2)^0=A^{-1}(M_2^0);$$
$$A(M_1^0)\supset M_2^0\cap A(X)。$$

而 $\{M_1^0, M_1\in\mathscr{A}\}$ 是 X 中 0 的 $T_{\mathscr{A}}$ 拓扑环境基。证毕。

推论 设 $A\in\mathscr{L}(X,Y)$，则 A' 是 Y' 到 X' 的强拓扑单调同态的充要条件为：对 Y 中的每个有界子集 M_1，存在 X 中的有界集 M_2，使

$$M_1\subset\overline{A(M_2)}。\tag{4}$$

证 考虑自然对偶 $\langle X,X'\rangle$ 及 $\langle Y,Y'\rangle$。根据 $A\in\mathscr{L}(X,Y)$，A 是 σ-连续的，所以 A' 也是 σ-连续的，$(A')'=A$。所以 A' 满足定理 4 的条件。事实上，(a)自然满足，而(b)$\Longleftrightarrow$(4)。

关于拓扑同态的扩张

定理 5 设 X、Y 是局部凸空间，$A\in\mathscr{L}(X,Y)$，X_1 是 X 的稠

密子空间。如果 $A|_{X_1}$ 是拓扑同态（拓扑单调同态），则 A 也是拓扑同态（相应地拓扑单调同态）。

证 首先注意 $X_1'=X'$，A 和 $A|_{X_1}$ 有相同的对偶 A'，X' 中关于 X_1 和 X 的等度连续集合也是一样的。根据定理 2，如果 $A|_{X_1}$ 是拓扑同态，则 $A'(Y')$ 是 X' 中的 $\sigma(X', X_1)$ 闭集。由于 $\sigma(X', X_1)\subset\sigma(X', X)$，所以 $A'(Y')$ 关于 $\sigma(X', X)$ 也是闭的。再由定理 2 即知 A 是拓扑同态。

下面将讨论 X、Y 是 Banach 空间的情形。这时 X' 上的范数拓扑即是强拓扑 $\beta(X', X)$。

引理 3 设 X，Y 是 Banach 空间，$A\in\mathscr{L}(X, Y)$。如果 A'：$Y'\to X'$ 的值域 $A'(Y')$ 在 X' 中按范数拓扑为闭的，则 $R(A)$ 是闭集。

证 我们分两种情况考虑：

(a) 如果 $R(A)$ 在 Y 中是稠密的。这时即是要证明 $R(A)=Y$，根据不依赖于本结论的 §3 中的引理 1，只要证明 A 是几乎开的。即对 X 中的每个 0 的环境 $U\in\mathscr{N}(X)$，$\overline{A(U)}\in\mathscr{N}(Y)$。记 $U_1=\{x|\,\|x\|<1\}$，只要证明 $\overline{A(U_1)}$ 包含某个 $V_\delta=\{y\in Y|\,\|y\|<\delta\}$。

因为 $R(A)$ 是稠密的，由 §1 中的定理 3，A' 是一对一的。由定理假设 $R(A')$ 是闭集，按逆算子定理，A'：$Y'\to A'(Y')$ 是拓扑同构映照。记 $(A')^{-1}$：$A'(Y')\to X'$ 为 A' 的逆。令 $\delta=1/\|(A')^{-1}\|$，我们证明

$$\overline{A(U_1)}\supset V_\delta. \tag{5}$$

下面用反证法证明：如果 $y_0\in V_\delta$，但是 $y_0\bar{\in}\overline{A(U_1)}$，由 Hahn-Banach 定理，必存在 $\varphi\in Y'$，$\|\varphi\|=1$，使得

$$\sup_{y\in A(U_1)}|\varphi(y)|\leqslant|\varphi(y_0)|.$$

则当 $x\in U_1$ 时，由于

$$|A'(\varphi)(x)|=|\varphi(Ax)|\leqslant|\varphi(y_0)|\leqslant\|y_0\|,$$

可知道 $\|A'(\varphi)\|\leqslant\|y_0\|<\delta$。但是由

$$1=\|\varphi\|\leqslant\|(A')^{-1}\|\|A'\varphi\|=\frac{1}{\delta}\|A'\varphi\|,$$

必须有 $\|A'\varphi\|\geqslant\delta$，导致矛盾，所以(5)式必须成立。

(b) 令 $Z=\overline{R(A)}$，定义 B: $X\to Z$ 如下：

$$Bx=Ax,\ x\in X.$$

B 的对偶为 B': $Z'\to X'$。则 $R(A')=R(B')$。事实上，如 $f\in R(B')$，$f=B'(h)$，$h\in Z'$。根据 Hahn-Banach 定理，延拓 h 为 Y 上的连续线性泛函 φ，由于

$$A'(\varphi)(x)=\varphi(Ax)=h(Bx)=B'(h)(x),$$

所以 $f=A'(\varphi)$，因此 $R(B')\subset R(A')$。反之，设 $f\in R(A')$，$f=A'\varphi$，$\varphi\in Y'$。令 $h=\varphi|_Z$，同样可知 $f=B'(h)$，故 $R(A')\subset R(B')$。这就证明了 $R(A')=R(B')$。这样，B' 的值域在 X' 中是闭的。由于对 B 满足情况(a)中的条件，根据(a)即知 $R(A)=R(B)=\overline{R(B)}=\overline{R(A)}$，$R(A)$是闭集。证毕。

定理 6　设 X、Y 是 Banach 空间，$A\in\mathscr{L}(X,Y)$，则下列条件是等价的：

(a) A 是 σ-拓扑同态；

(b) A 是拓扑同态；

(c) A 的值域 $R(A)$ 是闭的；

(d) A' 是 σ-拓扑同态；

(e) A' 的值域 $R(A')$ 是 X' 中的 σ^*-闭集；

(f) A' 的值域 $R(A')$ 在 X' 中按范数拓扑是闭的；

(g) A' 是强拓扑同态。

证　根据定理 3 的推论 2 可知 (a)$\Longleftrightarrow$(b)，根据 Banach-Schauder 定理(即开映照定理)，Banach 空间 X 到 Y 的连续线性映照是相对开的充要条件为值域是闭的，所以 (b)$\Longleftrightarrow$(c)，(f)$\Longleftrightarrow$(g)。由定理 1 可知(a)$\Longleftrightarrow$(e)，(d)$\Longleftrightarrow$(c)。所以(a)、(b)、(c)、(d)、(e)均等价。由于 X' 上的强拓扑强于 σ^*-拓扑，故 (e)$\Longrightarrow$(f)。由引理 3 知(f)$\Longrightarrow$(c)。由此(a)至(f)均等价。证毕。

推论 1　设 $A\in\mathscr{L}(X,Y)$，则 A 是拓扑单调同态的充要条件

为 A' 的值域 $R(A')=X'$。同样，A' 是强拓扑单调同态的充要条件为 $R(A)=Y$。

最后指出：推论 1 可以看作 Hahn-Banach 定理的推广。事实上，设 X 是 Y 的闭子空间，则嵌入映照 $i: X\to Y$ 是拓扑单调同态。容易验证 $i'\varphi=\varphi|_X$, $\varphi\in Y'$。根据推论 1 知 $R(i')=X'$。这就是 Hahn-Banach 定理。

§3 开映照和闭图象定理

在 §2 中，Grothendick 拓扑同态定理给出了任意局部凸空间之间的连续线性映照是拓扑同态的充要条件。对于 Frechet 空间的情形，Banach-Schauder 定理（即开映照定理）给出了强得多的结果。Ptak 首先成功地把 Banach-Schauder 定理推广到更大的空间类。同时还对闭图象定理作相应推广。关于开映照定理和闭图象定理是线性拓扑空间的重要课题之一，有很多结果，由 De Wilde 用 Webs 概念建立起来的理论可以导出许多有用的闭图象定理。本节只限于介绍和 Ptak 理论有关的一些基本结果。

一 Frechet 空间情形

设 X、Y 是线性拓扑空间。如果映照 $A: X\to Y$ 把 X 中的每个开集映成 Y 中的开集，则称 A 为开的。如果 A 是可逆的，则 A 是开映照的充要条件为 A^{-1} 是连续的。

如果 A 是线性映照，则 A 是开映照的充要条件为对每个 $U\in\mathscr{N}(X)$，有 $A(U)\in\mathscr{N}(Y)$。

如果线性映照 $A: X\to Y$ 对每个 $U\in\mathscr{N}(X)$ 有 $\overline{A(U)}\in\mathscr{N}(Y)$，则称 A 是几乎开的。如果对每个 $U\in\mathscr{N}(X)$，$\overline{A(U)}$ 是 $\overline{A(X)}$ 中 0 的环境，则称 A 为几乎相对开的。显然，开的线性映照是几乎开的，但是反过来就不一定对。例如设 X_1 是线性拓扑空间 X 的稠密子空间，则 X_1 到 X 的恒等嵌入是几乎开的，但不是开的。

(Ⅰ) 设 X、Y 是线性拓扑空间，$A: X\to Y$ 是线性映照。如果对每个 $U\in\mathscr{N}(X)$，$\overline{A(U)}$ 有非空内点，则 A 是几乎开的。

证　设$U\in\mathcal{N}(X)$，取$V\in\mathcal{N}(X)$，使得$V-V\subset U$。设y是$\overline{A(V)}$的某个内点，则必有

$$\overline{A(V)}-y\subset\overline{A(V)}-\overline{A(V)}\subset\overline{A(V)-A(V)}\subset\overline{A(U)}.$$

由$\overline{A(V)}-y\in\mathcal{N}(Y)$，即得$\overline{A(U)}\in\mathcal{N}(Y)$。

(II) 如果线性映照$A:X\to Y$的值域$R(A)$是Y中的第二纲集，则A是几乎开的。

证　设$U\in\mathcal{N}(X)$。由于U是吸收的，$X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}nU$。由此

$$A(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}nA(U).$$

由假定，$A(X)$是Y中的第二纲集，必存在某个n，$\overline{nA(U)}$，从而$\overline{A(U)}$包含非空内点。由(I)即知A是几乎开的。

引理1　设X是Frechet空间，Y是赋准范空间，如果连续线性映照$A:X\to Y$是几乎开的，则A是开的映照。

证　设$U_\varepsilon=\{x,\ \|x\|<\varepsilon\}\in\mathcal{N}(X)$，如能证明$A(U_\varepsilon)\supset\overline{A(U_{\frac{\varepsilon}{2}})}$，则由$A$是几乎开的，即知$A(U_\varepsilon)\in\mathcal{N}(Y)$。

设　$z\in\overline{A(U_{\frac{\varepsilon}{2}})}$，由于$A$是几乎开的，存在一列$\delta_n\to0$，使

$$\overline{A(U)_{\frac{\varepsilon}{2^n}}}\supset\{y\in Y\mid\|y\|<\delta_n\}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots),$$

取$x_1\in U_{\frac{\varepsilon}{2}}$，使得$\|z-A(x_1)\|<\delta_2$，则

$$z-A(x_1)\in\overline{A(U_{\frac{\varepsilon}{2^2}})}.$$

同样，存在$x_2\in U_{\frac{\varepsilon}{2^2}}$，使得$\|z-A(x_1)-A(x_2)\|<\delta_3$。重复这样的过程，对$n=1,\ 2,\ \cdots$，得到一列$x_n\in U_{\frac{\varepsilon}{2^n}}$，使得

$$\left\|z-\sum_{i=1}^{n}A(x_i)\right\|<\delta_{n+1}.$$

由于$\|x_i\|<\dfrac{\varepsilon}{2^i}$，根据$X$的完备性，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$收敛到某点$x\in X$。并且$\|x\|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|x_i\|<\varepsilon$，所以$x\in U_\varepsilon$。由$\delta_n\to0$，以及$A$的连续性可得到

$$z=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}A(x_i)=A\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=A(x)\in A(U_\varepsilon).$$

由此$\overline{A(U_{\frac{\varepsilon}{2}})}\subset A(U_\varepsilon)$。证毕。

定理1*（Banach-Schauder 定理）　设X、Y是Frechet空间，

则X到Y上(满)的连续线性映照A必是开映照。

证 由于Y是Frechet空间，Y是第二纲的。根据性质(II)，A是几乎开的。再由引理1即得。证毕。

有时可以把定理1表达为如下的等价形式：

推论1 设X、Y是Frechet空间，$A: X\to Y$是连续线性映照。则A是相对开的充要条件为$R(A)$是Y中的闭集。

证 由于Frechet空间的闭子空间本身可以看作一个Frechet空间，所以充分性是明显的。下面证明必要性：如果A是相对开的。作典型分解$A=J\check{A}K$，则$\check{A}$是$X/N(A)\to R(A)$的拓扑同构。由于$X/N(A)$是完备的，所以$R(A)$也是完备的，$R(A)$是Y中的闭集。

推论2 设X、Y是Frechet空间。A是X到Y上(满)的连续线性映照，并且是一对一的，则A是拓扑同构映照。

推论3 设X是线性空间。则X上可比较的Frechet拓扑必定相等。

设X、Y是拓扑空间，A是由X到Y的映照。作乘积拓扑空间$X\times Y$，集合$G(A)=\{(x, y)\in X\times Y,\ y=Ax\}$称为$A$的图。如果$G(A)$是$X\times Y$中的闭集，则称$A$有闭图象，或称$A$为闭映照。

(III) 连续映照$A: X\to Y$必是闭映照。

定理2(闭图象定理) 设X、Y是Frechet空间。如果线性映照$A: X\to Y$有闭图象，则A是连续的。

证 作$G(A)$到X的投影映照P_1，

$$P_1(x_1, y_1)=x_1,\quad (x_1, y_1)\in G(A).$$

由于A有闭图象，$G(A)$是$X\times Y$的闭子空间，则$G(A)$本身是一个Frechet空间。投影映照P_1是$G(A)$到X上的连续线性映照，并且是一对一的。事实上，如果$x_1=0$，因$(x_1, y_1)\in G(A)$，$y_1=Ax_1=0$。所以由推论2可知P_1是拓扑同构映照。再设$G(A)$到Y的连续线性映照$P_2: (x_1, y_1)\mapsto y_1$。则$A=P_2\cdot P_1^{-1}$是连续的。

二、开映照定理的推广

Ptak 的理论是从分析Banach-Schauder定理的经典证明出

发的。定理 1 的证明过程实际上包括两部分：首先证明了A是几乎开的映照，其次证明了几乎开的连续线性映照是开的。这样就很自然地提出下面两个问题：

(a) Y上加什么条件，能保证局部凸空间X到Y上的连续线性映照总是几乎开的？

(b) 应如何刻划这样的空间X，使X到任一局部凸空间Y中几乎开的连续线性映照总是开的？

(a) 的回答是容易的。

定理 3 从任一局部凸空间X到局部凸空间Y上的连续线性映照(或线性映照)A是几乎开的充要条件为Y是桶式空间。

证 设Y是桶式空间，A是从X到Y上的线性映照，U是X中 0 的均衡凸环境，则$A(U)$是均衡凸吸收集，$\overline{A(U)}$是Y中的桶，从而是Y中 0 的环境，A是几乎开的。

反之，考虑自然对偶$\langle Y, Y'\rangle$，则$(Y, \beta(Y, Y'))$到Y的恒等映照I是连续的，由假设I是几乎开的。容易知道，Y中桶的全体是$(Y, \beta(Y, Y'))$中 0 的环境基。如果T是Y中的一个桶，则$T\in \mathscr{N}(\beta(Y, Y'))$，所以$\overline{I(T)}=T$是$Y$中 0 的环境，$Y$是桶式空间。证毕。

在回答第二个问题前先作一些准备，首先对几乎开的连续线性映照给出对偶特征。

定理 4 设(X, T_1)、(Y, T_2)是局部凸空间，$\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$分别是X'与Y'中的等度连续集合全体，则

(a) 连续线性映照$A: X\to Y$是几乎相对开的充要条件为

$$A'(\mathscr{B})\supset \mathscr{A}\cap A'(Y). \tag{1}$$

(b) σ-连续线性映照$A: X\to Y$是连续的且是几乎相对开的充要条件为满足下述等式：

$$A'(\mathscr{B})=\mathscr{A}\cap A'(Y). \tag{2}$$

证 根据 §1 中的定理 4，本定理中(b)的结论可由(a)推得，下面只要证明(a)。

充分性：设$A'(\mathscr{B})\supset \mathscr{A}\cap A'(Y)$。假定$U$是$X$中 0 的任一均

衡凸环境，把 $\overline{A(X)}$ 看作 (Y, T_2) 的子空间，必须证明 $\overline{A(U)}$ 是 $\overline{A(X)}$ 中 0 的环境。根据双极定理，$\overline{A(U)} = A(U)^{00}$，而根据 §1 中的定理 3，$A(U)^0 = A'^{-1}(U^0) = A'^{-1}(U^0 \cap A'(Y'))$。由于 $U^0 \in \mathscr{A}$，按 (1)，存在 $M_2 \in \mathscr{B}$，使得 $A'(M_2) \supset U^0 \cap A'(Y')$。所以

$$A(U^0) \subset A'^{-1}(A'(M_2)) = M_2 + N(A'),$$

故

$$\overline{A(U)} = A(U)^{00} \supset (M_2 + N(A'))^0 = M_2^0 \cap \overline{A(X)}.$$

由于 $M_2^0 \in \mathscr{N}(Y)$，所以 $M_2^0 \cap \overline{A(X)}$ 是 $\overline{A(X)}$ 中 0 的环境，A 是几乎相对开的。

必要性：设 A 是几乎相对开的，令 $M_1 \in \mathscr{A} \cap A'(Y')$ 是 $A'(Y')$ 中的均衡凸 σ^*-闭子集，则 M_1^0 是 X 中 0 的环境。由于 A 是几乎相对开的，存在 $\mathscr{B}$ 中某均衡凸 σ^*-闭子集 M_2，使

$$\overline{A(M_1^0)} \supset M_2^0 \cap \overline{A(X)},$$

两边取极集

$$A(M_1^0)^0 = \overline{A(M_1^0)}^0 \subset (M_2^0 \cap \overline{A(X)})^0$$
$$= (M_2^0 \cap N(A')^0)^0 = [M_2 + N(A')]^-_{\sigma^*},$$

同时，由于 M_1 是 $A'(Y')$ 中的 σ^*-闭集，$M_1^{00} \cap A'(Y') = M_1$，$A(M_1^0)^0 = A'^{-1}(M_1^{00}) = A'^{-1}(M_1)$，所以

$$A'^{-1}(M_1) \subset [M_2 + N(A')]^-_{\sigma^*},$$

两边作用 A'，根据 A' 是 σ^* 连续的，

$$M_1 \subset A'[M_2 + N(A')]^-_{\sigma^*} \subset [A'(M_2 + N(A'))]^-_{\sigma^*}$$
$$= [A'(M_2)]^-_{\sigma^*}.$$

因为 M_2 是 σ^*-紧的，所以 $M_1 \subset [A'(M_2)]^-_{\sigma^*} = A'(M_2)$，(1)式成立。证毕。

(IV) 设 $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ 是几乎相对开的，则 $A'(Y')$ 是 aw^*-闭集。

证 设 M_1 是 X' 中的 σ^*-闭均衡凸等度连续集合，则由上述证明，存在 Y' 中均衡凸 σ^*-紧子集 M_2，使 $M_1 \cap A'(Y') \subset A'(M_2)$。故 $M_1 \cap A'(Y') = M_1 \cap A'(M_2)$，右边为两个 σ^*-紧集的交，所以是 σ^*-闭的。由此，$A'(Y')$ 是 aw^*-闭的。证毕。

根据 §2 中的定理 2 得：

定理 5　设 X、Y 是局部凸空间，$A\in\mathscr{L}(X,Y)$ 是几乎相对开映照，则 A 是相对开的充要条件为 $A'(Y')$ 是 σ^*-闭集。

让我们先回忆一下 Grothendieck 完备性定理。如果 X 是局部凸空间，X 是完备的对偶特征是：对于 X' 上的线性泛函 φ，如果在 X' 的每个等度连续集合上是 σ^*-连续的，则 φ 在 X' 上 σ^*-连续，即 $\varphi\in X$。等价地，可用几何语言描述如下：局部凸空间 X 是完备的充要条件为 X' 中的每个 aw^*-闭超平面是 σ^*-闭的。因此，由 ptak 引进的下述概念很自然地被看作完备概念的扩充。

定义　设 X 是局部凸空间。如果 X' 中的每个 aw^*-闭线性子空间是 σ^*-闭的，则称 X 为 B-完备的(或称 X 为 ptak 空间)。如果 X' 中的每个 σ^*-稠密的 aw^*-闭线性子空间是 σ^*-闭的，或等价地等于 X'，则称 X 是 B_r 完备的(或称 X 为 infra-ptak 空间)。

(Ⅴ) B 完备局部凸空间必为 B_r 完备的，B_r 完备局部凸空间必为完备的。

证　由于每个 σ^*-稠密线性子空间是线性子空间，前一结论是明显的。设 H 是 X' 中的 aw^*-闭超平面，则 H 或是 σ^*-闭的或是在 X' 中 σ^*-稠密的。如果 X 是 B_r 完备的，则后一情况不会发生。故由 Grothendieck 完备性定理，X 是完备的。证毕。

根据第 3 章 §6 中的 Banach-Dieudonné 定理可知，如果 X 是局部凸 Frechet 空间，则 X' 中的每个 aw^*-闭凸集是 σ^*-闭的。而线性子空间是凸集，所以每个局部凸 Frechet 空间是 B 完备的。

B 完备性有下述继承性。对一般的完备性下述定理不成立。

定理 6　B 完备空间的每个分离的商拓扑空间是 B 完备的。

证　设 X 是 B 完备空间，Y 是分离的局部凸空间，$A:X\to Y$ 是一个商映照(即 A 是连续线性映照，并且是开的)。A' 是 A 的对偶。设 S 是 Y' 中 aw^*-闭线性子空间，则 $A'S$ 必是 X' 中 aw^*-闭子空间。事实上，如果 $V\in\mathscr{N}(X)$，$M=A'S\cap V^0$，则由 § 1 中的定理 3，有

$$M=A'S\cap A'(A'^{-1}(V^0))=A'S\cap A'(A(V)^0)$$
$$=A'(S\cap A(V)^0).$$

由A是开的,$A(V)\in\mathscr{N}(Y)$,所以$S\cap A(V)^0$是σ^*-紧的。由A'的σ^*-连续性知M是σ^*-紧的即知$A'S$是aw^*-闭的。又由X是B完备的,$A'S$是X'中的σ^*-闭集。由A'的σ^*连续性知$A'^{-1}(A'S)$是σ^*-闭的。因为A是开映照,A的值域是Y,所以A'是一一映照,$S=A'^{-1}(A'S)$是σ^*-闭的,这就证明了Y是B完备的。证毕。

推论 B完备的分离的商拓扑空间是完备的。

我们还可以证明B完备空间的闭子空间还是B完备的。下面给一个B完备空间的例子,它可以不是可距离化的。

例 设(F, T)是局部凸 Frechet 空间,考虑自然对偶$\langle F, F'\rangle$,在F'上取 Mackey 拓扑$\tau(F', F)$,令$X=F'$,则$(X,\tau(X, F))$是B完备的。事实上,设S是$X'=F$中aw^*-闭线性子空间,如果能证明S是T闭的,则即可推得S是$\sigma(X', X)=\sigma(F, F')$拓扑闭的。设$\{x_n\}\subset S$,且$x_n\xrightarrow{T}x$,令$E=\{x_n\}\cup\{x\}$,则$E$是$(F, T)$中的紧集。由于$(F, T)$是完备的,由第三章§5中的定理3,$E$是$\tau(X, F)$等度连续集合。由于$S$是$aw^*$-闭的,$S\cap E$是$E$中的$\sigma^*=\sigma(F, F')$拓扑闭集。所以也是$E$中的$T$闭集,$x\in S$。特别是,如果$(F, T)$是非自反的 Banach 空间,则$(F', \tau(F', F))$不是拟桶空间,当然更不是可距离化的。这就给出了一个不是可距离化的B完备空间的例子。

由于B完备空间必是B_r完备的,所以上述例子也是B_r完备的。但是,是否存在一个局部凸空间是B_r完备的,但不是B完备的,这个问题至今尚未解决。

定理 7 (a)局部凸空间X是B完备的充要条件为:由X到任一局部凸空间Y的连续线性,几乎相对开映照A是相对开的,

(b) 局部凸空间X是B_r完备的充要条件为:由X到任一局部凸空间Y的每个一对一的连续线性,几乎相对开映照A是相对开的。

证 充分性:(a)设X是B完备的,$A: X\to Y$是连续线性的几乎相对开映照。则由性质(IV),A'的值域$A'(Y')$是X'中aw^*-闭

集。由 X 是 B 完备的，$A'(Y')$ 是 σ^*-闭的。由定理 5 即知 A 是相对开的。

(b) 由于 A 是一一映照，所以 $A'(Y')$ 在 X' 中是 σ^*-稠密的。由于 X 是 B_r 完备的，σ^*-稠密 aw^*-闭线性子空间 $A'(Y')$ 是 σ^*-闭的，即为 X'。同(a)一样，即知 A 是相对开的。

必要性：(a) 设 X 是局部凸空间，$\mathscr{A}$ 是 X' 中的等度连续集合全体。如果 X 不是 B 完备的，则 X' 中必有 aw^*-闭，但不是 σ^*-闭的线性子空间 H。容易知道，$\sigma(X', X)$ 在 H 上的限制 $\sigma(X', X)|_H$ 和 $\sigma(H, H')$ 一致，其中 $H'=X/H^\perp$。考虑恒等嵌入映照

$$J: (H, \sigma(H, H'))\to(X', \sigma(X', X)),$$

则 J 是 σ-拓扑单调同态。其对偶 J' 即是 $(X, \sigma(X, X'))$ 到 $(H', \sigma(H', H))=(X/H^\perp, \sigma(X/H^\perp, H))$ 上的商映照，记为 $K=J'$。

由于 H 是 aw^*-闭的，$\mathscr{A}\cap H$ 是 H 中的由均衡凸 $\sigma(H, H')$ 紧子集张成的饱和集类。考虑对偶 $\langle H', H\rangle$，$\mathscr{A}\cap H$ 决定了 H' 上一个一致收敛拓扑 T'。根据 Mackey-Arens 定理，T' 是 H' 上的相容拓扑。由于 $K'=J''=J$，$J(\mathscr{A}\cap H)=\mathscr{A}\cap H$，由定理 4 的 (b) 知，由 X 到 $(X/H^\perp, T')$ 上的 σ-连续线性映照 K 是连续的几乎相对开映照。但是因为 H 不是 σ^*-闭的，根据 §2 中的性质(II)知，K 不是相对开的，这和(a)的假设相矛盾。

(b) 的证明是类似的。如果 X 不是 B_r 完备的，则可构造一个 X 上的几乎相对开的、但不是相对开的一对一的连续线性映照。证毕。

由定理 3 和定理 7 立即可得到 Banach-Schauder 定理的推广。

推论(Ptak) (a) 每一个从 B 完备局部凸空间 X 到桶式空间 Y 上的连续线性映照是拓扑同态映照。

(b) 每一个从 B_r 完备局部凸空间 X 到桶式空间 Y 上的一对一的连续线性映照是拓扑同构。

这样，就回答了本小节提出的第二个问题。Ptak 空间刻划了局部凸空间 X 这样的性质，使由 X 到任何局部凸空间 Y 上的连续

线性，几乎开映照总是开的。我们自然会问，如果把 Y 限制为桶式空间，这个性质是否对更大一些的空间类也保持成立。

Husain 提出了以下概念：设 X 是局部凸空间。对于 X' 中的 aw^*-闭子空间 H，如果 H 中所有的 σ^*-有界子集都是等度连续的，必能推得 H 是 σ^*-闭的，则称 X 为 $B(\mathscr{T})$-空间。Husain 证明了下述定理，但是证明是相似的(可见参考文献[5])。

定理 8 设 X 是局部凸空间，X 到桶式空间 Y 上的每一个连续线性映照是开的充要条件为：X 是 $B(\mathscr{T})$空间。

三、闭图象定理的推广

经典的闭图象定理是 Banach-Schauder 定理的简单推论。对于线性拓扑空间中经过推广的开映照定理，可以得到相应的一些闭图象定理，但是其证明方法并不是前者的简单推论。

设 X、Y 是局部凸空间，$A: X\to Y$ 是线性映照，则如§1 所述，可以定义线性映照 $A': Y'\to X^*$，

$$A'(\varphi)(x)=\varphi(Ax),\quad x\in X,\ \varphi\in Y'.$$

令 $\Delta=(A')^{-1}(X')=\{\varphi\in Y'\,|\,A'\varphi\in X'\}$，则

(V) $\Delta=\bigcup\{A(U)^0,\ U$ 是 X 中 0 的均衡凸环境$\}$。

证 设 $\varphi\in A(U)^0\subset Y'$，$\sup\limits_{x\in U}|\varphi(Ax)|=\sup\limits_{x\in U}|(A'\varphi)x|\leqslant 1$，所以 $A'\varphi\in X'$，$A(U)^0\subset\Delta$。反之，如果 $\varphi\in\Delta$，则 $A'\varphi\in X'$，必存在 0 的某均衡凸环境 U，使得当 $x\in U$ 时，$|(A'\varphi)x|\leqslant 1$，即 $\varphi\in A(U)^0$。证毕。

如果 A 是闭映照，则 $G(A)=\{(x,y)\,|\,y=Ax\}$ 是 $X\times Y$ 中的闭集。一个闭线性映照可以不是 σ-连续的。

下面给出闭线性映照的特征：

定理 9 设 (X,T_1)、(Y,T_2)是局部凸空间，$A: X\to Y$ 是线性映照，则下述诸条件是等价的：

(a) A 是闭的；

(b) Δ 在 Y' 中是 σ^*-稠密的；

(c) 在 Y 上存在分离的局部凸拓扑 T_2'，使 $T_2'\subset T_2$，使得 A 是

(X, T_1)到(Y, T_2')的连续映照。

证　$(a)\Rightarrow(b)$：设A是闭的，为了要证明Δ在Y'中是σ^*-稠密的，由双极定理，只要证明Δ在Y上是全的。设$y\in Y, y\neq 0$，则$(0, y)\overline{\in} G(A)$。由此存在$V\in\mathcal{N}(X)$、$W\in\mathcal{N}(Y)$，使得

$$((0, y)+V\times W)\cap G(A)=\emptyset.$$

由此推得$(y+W)\cap A(V)=\emptyset$。故$y\overline{\in}\overline{A(V)}$。不妨假定$V$是均衡凸的，则由第2章§3中的定理5，存在$\varphi\in Y'$，使得

$$|\varphi(y)|>1, \text{且} \sup_{t\in A(V)}|\varphi(t)|\leqslant 1.$$

当$t\in V$时，得

$$|(A'\varphi)(t)|=|\varphi(At)|\leqslant 1.$$

所以$A'\varphi\in X'$，从而$\varphi\in\Delta$。根据$\varphi(y)\neq 0$，Δ在Y上是全的。

$(b)\Rightarrow(c)$：设$H=\Delta$是Y'中的σ^*-稠密子空间。由于$A'H=A'\Delta\in X'$，根据§1中的定理1可知道：A是$(X, \sigma(X, X'))\to(Y, \sigma(Y, H))$的连续映照，所以也是$(X, T_1)\to(Y, \sigma(Y, H))$连续的。取$T_2'=\sigma(Y, H)\subset T_2$，即为所求。

$(c)\Rightarrow(a)$：设Y上分离的局部凸拓扑$T_2'\subset T_2$，使A是$(X, T_1)\to(Y, T_2')$连续的，则由性质(III)，$G(A)$是$T_1\times T_2'$闭集。由于$T_1\times T_2'\subset T_1\times T_2$，$G(A)$也是$T_1\times T_2$闭的，即$A$是闭映照。证毕。

定义　设X、Y是局部凸空间，线性映照$A: X\to Y$称为几乎连续的是指：若对每一个$V\in\mathcal{N}(Y)$，必有$\overline{A^{-1}(V)}\in\mathcal{N}(X)$。

"几乎连续"这个概念和"几乎开"的概念有紧密联系。如果A是X到Y上的一一映照，则A是几乎连续的充要条件为：A^{-1}是几乎开的线性映照。

(VI) 设X是桶式空间，Y是任一局部凸空间，则线性映照$A: X\to Y$必是几乎开的。

证　设$V\in\mathcal{N}(Y)$，不妨设V是均衡凸环境，则$\overline{A^{-1}(V)}$是X中的桶。由于X是桶式空间，$\overline{A^{-1}(V)}\in\mathcal{N}(X)$。证毕。

下面给出几乎连续映照的对偶特征，其中$A': Y'\to X^*$。

定理 10　设X, Y是局部凸空间。$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$分别是X'，Y'中的

等度连续集合类，X 到 Y 的线性映照 A 是几乎连续的充要条件是

$$A'(\Delta\cap\mathscr{B})\subset\mathscr{A}。\tag{3}$$

证 A 是几乎连续的，是指对于 Y 中每个 0 的均衡凸环境 V，存在 X 中 0 的均衡凸闭环境 U，使 $\overline{A^{-1}(V)}\supset U$，这等价于 $A^{-1}(V)^0\subset U^0$。下面将证明对于上述 V 总有 $A^{-1}(V)^0=A'(\Delta\cap V^0)$，这就说明 A 是几乎连续等价于 $A'(\Delta\cap V^0)\subset U^0$，即(3)式。

下面证明 $A^{-1}(V)^0=A'(\Delta\cap V^0)$。设 $\varphi\in\Delta\cap V^0$，由 Δ 的定义 $A'\varphi\in X'$。当 $x\in A^{-1}(V)$ 时 $Ax\in V$，所以

$$|(A'\varphi)(x)|=|\varphi(Ax)|\leqslant 1,$$

即 $A'\varphi\in A^{-1}(V)^0$。因此 $A'(\Delta\cap V^0)\subset A^{-1}(V)^0$。

反过来，如果 $f\in A^{-1}(V)^0$。先定义 $A(X)$ 上的线性泛函 φ。令

$$\varphi(Ax)=f(x),\ x\in X.$$

φ 的定义是唯一的。事实上，如 $y=Ax_1$ 同时 $y=Ax_2$，则 $x_1-x_2\in A^{-1}(0)$。由于 $f\in A^{-1}(V)^0$，$f(x_1-x_2)=0$，$f(x_1)=f(x_2)$。容易知道

$$y\in V\cap A(X)\Rightarrow|\varphi(y)|\leqslant 1.$$

所以 φ 是 $A(X)$ 上的连续线性泛函。按 Hahn-Banach 定理，把 φ 延拓到整个 Y，并且使当 $y\in V$ 时，$|\varphi(y)|\leqslant 1$，所以 $\varphi\in Y'$。由于对每个 $x\in X$，$\varphi(Ax)=f(x)$，所以 $f=A'\varphi$，$\varphi\in\Delta\cap V^0$，$f\in A'(\Delta\cap V^0)$。这就证明了 $A^{-1}(V)^0\subset A'(\Delta\cap V^0)$。证毕。

再由 §1 中的定理 4 即得下面的定理：

定理 11 设 X、Y 是局部凸空间。则几乎连续映照 A 是连续的充要条件为 $\Delta=Y'$。

与此等价地，A 是 σ-连续的。

(VII) 设 A 是 X 到 Y 的几乎连续线性映照，则 Δ 是 aw^*-闭的。

证 为了证明 Δ 是 aw^*-闭的，只要证明对于 Y 中 0 的每个均衡凸环境 V，$\Delta\cap V^0$ 是 Y' 中 σ^*-闭的即可。由定理 10 知，存在 X 中 0 的均衡凸环境 U，使得

$$A'(\Delta\cap V_0)\subset U^0.$$

所以 $\Delta\cap V^0\subset A'^{-1}(U_0)=\{\varphi\in Y'|\sup\limits_{x\in U}|(A'\varphi)x|\leqslant 1\}=\{\varphi\in Y'|\sup\limits_{x\in U}|\varphi(Ax)|\leqslant 1\}=A(U)^0$。

由性质(V)，$A(U)^0\subset\Delta$，所以 $\Delta\cap V^0=A(U)^0\cap V^0$。由于 $A(U)^0\cap V^0$ 是 Y' 中 σ^*-闭集，故 $\Delta\cap V^0$ 是 σ^*-闭的。证毕。

下面的闭图象定理是和定理 7 的开映照定理相对应的。

定理 12 局部凸空间 Y 是 B_r 完备的充要条件为：对于任一局部凸空间 X 到 Y 的几乎连续闭线性映照 A 必是连续的。

证 必要性：设 Y 是 B_r 完备的，A 满足所述条件。由性质(VII)知 Δ 是 aw^*-闭的。根据定理 9 知 Δ 是 σ^*-稠密的。因为 Y 是 B_r 完备的，所以 $\Delta=Y'$。由定理 11 知 A 是连续的。

充分性：如果 Y' 中存在 aw^*-闭 σ^*-稠子空间 $H\neq Y'$。考虑自然对偶 $\langle Y, Y'\rangle$。令 T' 是 Y 中在 $\{H\cap U^0|U\in\mathcal{N}(T)\}$ 上的一致收敛拓扑。与定理 7 的必要性证明相同，考虑到 $H^{\perp}=\{0\}$，则 Y 到 (Y, T') 的恒等映照 I 是连续的且是几乎开的，但不是开的。其逆映照 I^{-1} 是局部凸空间 (Y, T') 到 Y 的几乎连续，但不是连续的映照。又因 I 是连续映照，I 从而 I^{-1} 是闭映照，这样就和定理的假设相矛盾。所以 Y 是 B_r 完备的。证毕。

由性质(VI)有以下推论：

推论 从桶式空间到 B_r 完备局部凸空间 Y 的闭线性映照必是连续的。

对于 X 是桶式空间的情形，Kōmura 得到了完善的结果。

设 X 是局部凸空间，X' 是共轭空间，X^* 是 X 的代数对偶，H 是 X' 的子空间。记 $\overline{H}$ 为 H 在 $(X^*, \sigma(X^*, X))$ 中的关于有界收敛的闭包。如果对 X' 中的每一个 σ^*-稠密子空间 H 必有 $\overline{H}\cap X'=X'$，则称 X 为 infra-(s)-空间。

定理 13 局部凸空间 Y 是 infra-(s)-空间的充要条件为：从任意一个桶式空间 X 到 Y 的每个闭线性映照 A 是连续的。

显然，B_r 完备局部凸空间是 infra-(s)-空间(参阅[5])。

闭图象定理在泛函分析中常被用来证明线性映照的连续性。下面给出一个应用：

(VIII) 设X是B_r完备的桶式空间，并且X是两个闭子空间的代数直接和：$X=H_1\oplus H_2$，则H_1和H_2是拓扑补子空间。

证 设$x=x_1+x_2$，其中$x_1\in H_1$，$x_2\in H_2$，容易证明H到H_1的投影算子P：$x_1+x_2\mapsto x_1$是闭算子。由定理12知B_r完备局部凸空间的闭子空间仍是B_r完备的，所以H_1是B_r完备的。由定理12的推论知P是连续的。根据第一章§10中的引理1知：H_1和H_2是拓扑补子空间。证毕。

特别是，(VIII)的结论对Frechet空间也成立。

§4 连续线性映照空间上的拓扑

设X、Y是局部凸空间，$\mathscr{L}(X,Y)$表示由X到Y的连续线性泛函全体，按照通常的线性运算

$$(\alpha T+\beta S)(x)=\alpha T(x)+\beta S(x),\ x\in X,$$

构成线性空间。

当$Y=K$时，$\mathscr{L}(X,K)=X'$，即为X上的连续线性泛函全体。

设$\mathscr{B}$是X中的由有界集组成的集族。$\{p_\alpha(y),\ \alpha\in\mathscr{A}\}$是局部凸空间$Y$上的连续拟范数全体，则$Y$上局部凸向量拓扑由$\{p_\alpha(y),\ \alpha\in\mathscr{A}\}$决定。对于$B\in\mathscr{B}$以及$\alpha\in\mathscr{A}$，令

$$p_{B,\alpha}(T)=\sup_{x\in B}p_\alpha(Tx),\ T\in\mathscr{L}(X,Y).$$

由于$T\in\mathscr{L}(X,Y)$，T把每个有界集映为有界集，易知$p_{B,\alpha}(T)$是$\mathscr{L}(X,Y)$上的一个拟范数。由拟范数族$\{p_{B,\alpha}(T)\mid B\in\mathscr{B},\ \alpha\in\mathscr{A}\}$定义了一个$\mathscr{L}(X,Y)$上的局部凸拓扑，称为$\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$拓扑，对应的局部凸空间记为$\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X,Y)$。显然，$\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$可以看作$\mathscr{B}$中集上的一致收敛拓扑。

(I) 在$\mathscr{L}(X,Y)$上的拓扑$\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$满足Hausdorff分离性的充要条件为$\bigcup_{B\in\mathscr{B}}B$在$X'$上是全的。

证 充分性：$\bigcup_{B\in\mathscr{B}}B$在$X'$上是全的等价于由$\cup\{B,\ B\in\mathscr{B}\}$

张成的线性子空间 X_1 在 X 中是稠密的。如果对每一个 $B\in\mathscr{B}$, $\alpha\in\mathscr{A}$, $\sup\limits_{x\in B} p_\alpha(Tx)=0$, 则对于每个 $x\in X_1$, $\alpha\in\mathscr{A}$, 必有

$$p_\alpha(Tx)=0,\ x\in X_1.$$

由于 Y 满足分离性，所以 $Tx=0$。又由于 X_1 在 X 中是稠密的，即知 $T=0$。

必要性：用反证法：设 X_1 在 X 中的闭包 $[X_1]^-\neq X$, 取 $x\in X\setminus[X_1]^-$。由 Hahn-Banach 定理，存在 $f\in X'$, 使得 $f(x)=1$, 但是在 $[X_1]^-$ 上 $f(x)=0$。任取 Y 中一个非零元 y, 作 $X\to Y$ 的连续线性映照

$$A: x\mapsto\langle x, f\rangle y,$$

则对于每个 $B\in\mathscr{B}$, $\alpha\in\mathscr{A}$, $\sup\limits_{x\in B} p_\alpha(Ax)=0$, 这就同 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ 满足分离性的假设相矛盾。证毕。

由此，以后我们总假定 $\bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}} B$ 是 X 中关于 X' 全的子集。

如果以 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 表示由集族 $\mathscr{B}$ 张成的饱和集族，类似于第三章 §3 中的定理 2 的推论，有：

(II) 在 $\mathscr{L}(X, Y)$ 上的拓扑 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ 和 $\mathscr{T}_{\widetilde{\mathscr{B}}}$ 相一致。并且 $\mathscr{L}(X,Y)$ 上两个一致收敛拓扑 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}_1}$ 和 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}_2}$ 相一致的充要条件为 $\widetilde{\mathscr{B}}_1=\widetilde{\mathscr{B}}_2$。

证 如果 $A\subset[\Gamma(\lambda_1B_1\cup\cdots\cup\lambda_mB_m)]^-$, 其中 $B_1,\cdots,B_m\in\mathscr{B}$, $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 是正数，则对于 $\alpha\in\mathscr{A}$, 有

$$\sup_{x\in A} p_\alpha(Tx)\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant m}\{\lambda_j\sup_{x\in B_j} p_\alpha(Tx)\}.$$

所以 $\mathscr{T}_{\widetilde{\mathscr{B}}}\subset\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$。但总有 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}\subset\mathscr{T}_{\widetilde{\mathscr{B}}}$, 所以 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}=\mathscr{T}_{\widetilde{\mathscr{B}}}$。

第二个结论可以由第 3 章 §3 中的定理 3 和以下的结论推知。

(III) 设 $\mathscr{B}$ 是 X 上由有界集组成的集族，则在 X' 上可定义 $\mathscr{B}$ 上的一致收敛拓扑 $T_{\mathscr{B}}$, 相应的局部凸空间记为 $X'_{\mathscr{B}}$。取 Y 中的一个非零元 y。对于每个 $f\in X'$, 对应 $\mathscr{L}(X, Y)$ 中的映照

$$T_f: x\mapsto\langle x, f\rangle y,$$

这样定义了由 X' 到 $\mathscr{L}(X, Y)$ 的线性映照

$$K: f\mapsto T_f,\quad f\in X'.$$

记 K 的值域为 H, 则 K 是 $X'_{\mathscr{B}}$ 和 $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X, Y)$ 的子空间 H 之间的拓

扑同构映照。

证 由于对每一个 $B\in\mathscr{B}$，$\alpha\in\mathscr{A}$，有

$$\sup_{x\in B} p_\alpha(T_f\, x)=\sup_{x\in B} p_\alpha(\langle x, f\rangle y)$$

$$=\sup_{x\in B}|\langle x, f\rangle| p_\alpha(y)$$

即可知道。

对于$\mathscr{B}$的不同选取，可以得到下述一些常用拓扑：

(a) 点点收敛拓扑

取 $\mathscr{B}=\{\{x\}, x\in X\}$，则 $\mathscr{L}(X, Y)$ 中 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ 拓扑由拟范数族 $\{p_\alpha(Tx)|x\in X, \alpha\in\mathscr{A}\}$ 决定，这时相应的拓扑记为 $\mathscr{T}_\sigma$；相应的空间记为 $\mathscr{L}_\sigma(X, Y)$。

如果 X、Y 是赋范空间，则 $\mathscr{L}_\sigma(X, Y)$ 上的点点收敛拓扑相当于线性有界算子上的强拓扑。而 $\mathscr{L}_\sigma(X, Y_\sigma)$ 中的点点收敛拓扑才相当于线性有界算子上的弱拓扑。这里还应注意：因为X是赋范空间，所以是 Mackey 空间，由 §1 中的定理 5 的推论 3，$\mathscr{L}(X, Y_\sigma)=\mathscr{L}(X, Y)$。

(b) 完全有界集上的(一致)收敛拓扑

取$\mathscr{B}$为X中的完全有界集全体。在完全有界集上的一致收敛拓扑记为 $\mathscr{T}_C$，$\mathscr{L}(X, Y)$赋以 $\mathscr{T}_C$ 拓扑记为 $\mathscr{L}_C(X, Y)$。

(c) 有界收敛拓扑

取$\mathscr{B}$为X中的有界集全体，$\mathscr{L}(X, Y)$ 中在有界集上的一致收敛拓扑记为$\mathscr{T}_\beta$；相应的空间记为 $\mathscr{L}_\beta(X, Y)$。

如果 X、Y 是赋范空间，则 $\mathscr{L}(X, Y)$ 上的有界收敛拓扑由下述范数决定：

$$\|T\|=\sup_{\|x\|<1}\|Tx\|。$$

$\mathscr{L}_\beta(X, Y)$ 按此范数是一个赋范空间。此时，有界收敛拓扑即是 $X\to Y$ 的线性有界算子上的一致收敛拓扑或范数拓扑。

(d) 等度连续收敛拓扑

设 Z 是一个局部凸空间，$X=Z'$ 是 Z 的强对偶空间，Y 是局部凸空间，则可以在 $\mathscr{L}(Z', Y)$ 上建立如下拓扑：令 $\mathscr{B}$ 为 Z' 中的所

有等度连续集合全体，则 $\mathscr{L}(Z';Y)$上在 $\mathscr{B}$ 上的一致收敛拓扑称为等度连续收敛拓扑，记为 $\mathscr{T}_e$；相应的空间记为 $\mathscr{L}_e(Z', Y)$。

当 $Y=K$ 时，$\mathscr{L}(X, K)=X'$。则 $\mathscr{T}_\sigma$、$\mathscr{T}_C$、$\mathscr{T}_\beta$ 拓扑分别是 X' 上的弱拓扑、完全有界集上的一致收敛拓扑 T_C 以及强拓扑。

(III) 在 $\mathscr{L}(X, Y)$上，$\mathscr{T}_\sigma\subset\mathscr{T}_C\subset\mathscr{T}_\beta$。

在 $\mathscr{L}(X, Y)$上的向量拓扑除上述方法外，还可以用下面两种等价的方式描述：

(1) 设 X、Y 是局部凸空间，$\mathscr{B}$是 X 上的由有界集组成的集族(由(II)不妨假定$\mathscr{B}$是饱和集族)，对 $V\in\mathscr{N}(Y)$以及 $B\in\mathscr{B}$。令

$$U(B, V)=\{T\in\mathscr{L}(X, Y)\,|\,T(B)\subset V\},$$

则 $\{U(B, V)\,|\,B\in\mathscr{B}, V\in\mathscr{N}(Y)\}$ 构成某局部凸拓扑的局部基，这个拓扑称为 $\mathscr{L}(X, Y)$上的 $\mathscr{T}_\mathscr{B}$ 拓扑。由于$\{p_\alpha(y)\leqslant 1, \alpha\in\mathscr{A}\}$组成 Y 中 0 的环境基。所以如果 $V=\{y\,|\,p_\alpha(y)\leqslant 1\}$，则

$$U(B, V)=\{T\in\mathscr{L}(X, Y)\,|\,\sup_{x\in B}p_\alpha(Tx)\leqslant 1\},$$

所以这里定义的 $\mathscr{T}_\mathscr{B}$ 和以前定义的是一致的。

(2) 记 Y' 中的等度连续集合全体为 $\mathscr{E}$，则 Y 上局部凸拓扑等于在 $\mathscr{E}$ 上的一致收敛拓扑。由此，$\mathscr{L}(X, Y)$上的 $T_\mathscr{B}$ 拓扑还可用下述比较对称的形式来定义。对于 $B\in\mathscr{B}$, $A\in\mathscr{E}$，令

$$p_{B,A}(T)=\sup_{x\in B,\varphi\in A}|\langle\varphi, Tx\rangle|,$$

则 $\{p_{B,A}(T)\,|\,B\in\mathscr{B}, A\in\mathscr{E}\}$定义了一个局部凸拓扑。如果记 $p_A(y)=\sup\limits_{\varphi\in A}|\langle\varphi, y\rangle|$，则

$$p_{B,A}(T)=\sup_{x\in B}p_A(Tx).$$

由此可知这个局部凸拓扑即是 $\mathscr{L}(X, Y)$上的 $\mathscr{T}_\mathscr{B}$ 拓扑。

由于 X' 可以看作 $\mathscr{L}(X, Y)$ 的特例，所以我们希望把有关 X' 的定理推广到 $\mathscr{L}(X, Y)$的情形：

设 $M\subset\mathscr{L}(X, Y)$，$A$ 是 X 的子集；B 是 Y 的子集。令

$$M'=\{T'\,|\,T\in M\};$$

$$M(A)=\bigcup_{T\in M}T(A);$$

$$M^{-1}(A)=\bigcap_{T\in M}T^{-1}(B).$$

定理 1 设 X、Y 是局部凸空间，$\mathscr{B}$是 X 中的有界子集族，$M\subset\mathscr{L}(X,Y)$，则下述条件是等价的：

(a) M 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X,Y)$中的有界集；

(b) 对每个 $B\in\mathscr{B}$，$M(B)$是 Y 中的有界集；

(c) 对每个 $V\in\mathscr{N}(Y)$，$M^{-1}(V)$吸收每个 $B\in\mathscr{B}$；

(d) 对于 Y' 中的每个等度连续集合 A，$M'(A)$是$(X',T_{\mathscr{B}})$中的有界集。

证 (a)和(b)的等价性是明显的。

(a)$\Longleftrightarrow$(c)：设 $\{p_\alpha(y),\alpha\in\mathscr{A}\}$ 是 Y 上的连续拟范数全体。M 是 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ 有界集的充要条件为：

$$\sup_{T\in M,x\in B}p_\alpha(Tx)<\infty,\ \alpha\in\mathscr{A},\ B\in\mathscr{B}.$$

因 $\{y|p_\alpha(y)\leqslant 1\}$ 是 Y 上 0 的一组局部基，不妨设 $V=\{y|p_\alpha(y)\leqslant 1\}$，则 $\sup\limits_{T\in M,x\in B}p_\alpha(Tx)\leqslant\lambda<\infty$ 的充要条件为 $M^{-1}(V)\supset\lambda^{-1}B$，所以条件(a)和(c)是等价的。

(a)$\Longleftrightarrow$(d)：设$\mathscr{E}$是 Y' 中等度连续集合全体。M 是 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ 有界的充要条件为：对每一个 $B\in\mathscr{B}$，$A\in\mathscr{E}$，有

$$\sup_{T\in M}p_{B,A}(T)<\infty,$$

而

$$\begin{aligned}\sup_{T\in M}p_{B,A}(T)&=\sup_{T\in M,x\in B,\varphi\in A}|\langle\varphi,Tx\rangle|\\&=\sup_{T\in M,x\in B,\varphi\in A}|\langle T'\varphi,x\rangle|\\&=\sup_{x\in B,f\in M'A}|\langle f,x\rangle|\\&=\sup_{f\in M'A}p_B(f).\end{aligned}$$

所以M是$\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$有界的充要条件为：每个 $M'(A)$，$A\in\mathscr{E}$ 是 $(X',T_{\mathscr{B}})$中的有界集。证毕。

现在回忆一下第 3 章 §7 中的 Banach-Mackey 定理的结果：设$\langle X,Y\rangle$是对偶空间，则 Y 中的每个自完备均衡凸弱闭弱有界子集 A 是 $\beta(Y,X)$有界集。同时 Y 中的每个弱有界集在 X 的自完备

集上一致有界。如果X是序列完备局部凸空间，则X'上的σ^*-有界集和强有界集是一致的。

为方便起见，如果局部凸空间X中的每个有界集包含在自完备均衡凸闭有界集中，则称X为局部完备的。显然，每个序列完备的局部凸空间是局部完备的。

下面的定理是 Banach-Mackey 定理的推广：

定理 2　设X是局部完备的，则在$\mathscr{L}_\sigma(X, Y)$中的每个有界集是$\mathscr{L}_\beta(X, Y)$中的有界集。

其证明几乎和第3章§7中的一样。当X是 Banach 空间，Y是赋范空间的情形，就是所谓一致有界性原理：$\mathscr{L}(X, Y)$中的子集M是$\mathscr{T}_\beta$有界，即$\sup\limits_{T\in M}\|T\|<\infty$的充要条件为对每一个$x\in X$，有

$$\sup_{T\in M}\|Tx\|<\infty.$$

设X、Y是局部凸空间，M是$\mathscr{L}(X, Y)$中的集合。设$x_0\in X$，如果对于每一个$V\in\mathscr{N}(Y)$，存在$U\in\mathscr{N}(X)$，使当$x-x_0\in U$时，对每个$T\in M$，均有$T(x)-T(x_0)\in V$，则称M在x_0点等度连续。如果对任一$V\in\mathscr{N}(Y)$，总存在$U\in\mathscr{N}(X)$，使当$x_1-x_2\in U$时，对每个$T\in M$，均有$T(x_1)-T(x_2)\in V$，则称M在X上一致等度连续。

下述定理的证明和第二章§1中的定理4的证明相类似。

定理 3　设X、Y是局部凸空间，$M\subset\mathscr{L}(X, Y)$，则下述条件是等价的：

(a)　M在某点$x_0\in X$等度连续；

(b)　M在X上一致等度连续；

(c)　对于Y上的每一个连续拟范数q，必存在X上的连续拟范数p，使对每个$x\in X$，以及所有的$T\in M$，满足$q(Tx)\leqslant p(x)$。

(d)　对于Y中0的每个(均衡凸闭)环境V，$M^{-1}(V)$是X中0的环境。

下面给出等度连续集合的对偶特征：

定理 4　设X、Y是局部凸空间，$M\subset\mathscr{L}(X, Y)$，则$M$是等度

连续集合的充要条件为：对于 Y' 中的每个等度连续集合 E，$M'(E)$ 是 X' 中的等度连续集合。

证 充分性：设 X'、Y' 中的等度连续集合全体分别为 $\mathscr{E}_1$ 与 $\mathscr{E}_2$，则 X 上的局部凸拓扑由拟范数族 $\{p^F(x), F\in\mathscr{E}_1\}$ 决定，其中

$$p^F(x)=\sup_{f\in F}|\langle f, x\rangle|,$$

而 Y 上的局部凸拓扑由拟范数族 $\{q^E(y), E\in\mathscr{E}_2\}$ 决定，其中

$$q^E(y)=\sup_{\varphi\in E}|\langle\varphi, y\rangle|.$$

对 Y 上的任一连续拟范数 q^E，当 $T\in M$ 时，有

$$\begin{aligned} q^E(Tx)&=\sup_{\varphi\in E}|\langle\varphi, Tx\rangle|=\sup_{\varphi\in E}|\langle T'\varphi, x\rangle|\\ &\leqslant\sup_{f\in M'(E)}|\langle f, x\rangle|=p^{M'(E)}(x). \end{aligned}$$

由假设，$M'(E)$ 是 X' 中的等度连续集合，所以 $p^{M'(E)}(x)$ 是 X 上的连续拟范数，根据定理 3 的(c)即知 M 是 $\mathscr{L}(X, Y)$ 中的等度连续集合。

必要性：设 M 是等度连续集合，则对于 Y 中的每一个连续拟范数 $q^E(y)$，存在 X 上的连续拟范数 $p(x)$，使对每个 $T\in M$，有

$$q^E(Tx)\leqslant p(x).$$

即可得 $p^{T'E}(x)\leqslant p(x)$。令 $U=\{x|p(x)\leqslant 1\}$，则 $T'E\subset U^0$，由此 $M'(E)\subset U^0$，故 $M'(E)$ 是 X' 中的等度连续集合。证毕。

根据定理 3 的 (c)，有

(IV) $\mathscr{L}(X, Y)$ 中等度连续集 M 的均衡凸包 $\Gamma(M)$ 是等度连续的。

类似于第三章 §6 中的性质(III)，有

(V) $\mathscr{L}(X, Y)$ 中的每个等度连续集合 M 关于 $\mathscr{L}(X, Y)$ 上的每个局部凸向量拓扑 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ 是有界的。

证 根据条件 $\mathscr{B}$ 是 X 中的由有界集组成的集族。设 $\{q_\alpha(y), \alpha\in\mathscr{A}\}$ 是 Y 上的连续拟范数全体，则 $\mathscr{L}(X, Y)$ 上的 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ 拓扑由拟范数族 $\{q_{B,\alpha}(T)|B\in\mathscr{B}, \alpha\in\mathscr{A}\}$ 决定，其中

$$q_{B,\alpha}(T)=\sup_{x\in B} q_\alpha(Tx).$$

因为M是等度连续集合，由定理3的(c)，对$q_\alpha(y)$存在X上的连续拟范数$p(x)$，使对一切的$T\in M$，有

$$q_\alpha(Tx)\leqslant p(x),$$

则对任一$B\in\mathscr{B}$，有

$$\sup_{T\in M} q_{B,\alpha}(T)=\sup_{T\in M,x\in B} q_\alpha(Tx)$$
$$\leqslant\sup_{x\in B} p(x)<\infty.$$

即知M是$\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$有界集。证毕。

特别是，由性质(V)知，等度连续集合M必是点点有界的。在X是Banach空间，Y是赋范空间的情形，由Banach一致有界性定理可知道$\mathscr{L}(X, Y)$中点点有界的集合M必为等度连续的。

定理5　设X是桶式空间，Y是局部凸空间，那末$\mathscr{L}(X, Y)$中子集M是等度连续的充要条件为M是点点有界的。

证　由性质(V)，只要证明充分性：设V是Y中0的任一均衡凸闭环境，则$M^{-1}(V)=\bigcap_{T\in M} T^{-1}(V)$是$X$中均衡凸闭集，只要证明$M^{-1}(V)$是吸收的即可，由$X$是桶式空间即知$M^{-1}(V)\in\mathscr{N}(X)$，根据定理3的(d)即知，$M$是等度连续集合。下面证明$M^{-1}(V)$是吸收的。

设$x\in X$。令$U(x, V)=\{T\in\mathscr{L}(X, Y),\ T(x)\subset V\}$是0的$\mathscr{T}_\sigma$拓扑环境。由于$M$是点点有界的，即是$\mathscr{T}_\sigma$拓扑的有界集，所以存在$\lambda>0$，使得$\lambda M\subset U(x, V)$，即对每个$T\in M$，有$\lambda T(x)\subset V$，$\lambda x\in T^{-1}(V)$。所以

$$\lambda x\in\bigcap_{T\in M} T^{-1}(V)=M^{-1}(V),$$

即知$M^{-1}(V)$是吸收的。证毕。

类似地有：

定理6　设X是拟桶式空间，Y是局部凸空间，则$\mathscr{L}(X, Y)$中的子集M是等度连续的充要条件为M是$\mathscr{T}_\beta$有界的。

对于任何局部凸空间X、Y，则有

定理7 $M\subset\mathscr{L}(X, Y)$ 是$\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$有界的充要条件为$M'$是$\mathscr{L}(Y'_\beta, X'_{\mathscr{B}})$中的等度连续集合。

证 根据性质(II)，不妨设$\mathscr{B}$是饱和集族。设M是$\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$有界的。令$B\in\mathscr{B}$是$X$中的均衡凸闭有界子集，则根据定理1，存在$Y$中的均衡凸闭有界子集$C$，使$M(B)\subset C$。对于$T\in M$，$T(B)\subset C$，$T(B)^0\supset C^0$，$T'^{-1}(B^0)\supset C^0$，$T'(C^0)\subset B^0$，所以$M'(C^0)\subset B^0$。由定理3的(d)知$M'$是$\mathscr{L}(Y'_\beta, X'_{\mathscr{B}})$中的等度连续集合。充分性的证明只要把上述证明的顺序倒过来即可。证毕。

对于X'中的等度连续集合，由Alaoglu-Bourbaki定理知，是相对$\sigma(X', X)$拓扑紧的。但是对于$\mathscr{L}(X, Y)$中的等度连续集合M，则不一定是相对$\mathscr{T}_\sigma$拓扑紧的。类似于第3章§6中的定理6的结论仍成立。

定理8 设X、Y是局部凸空间，则在$\mathscr{L}(X, Y)$中的每个等度连续集合M上，下述三个一致收敛拓扑是一致的：

(a) 完全有界集上的一致收敛拓扑$\mathscr{T}_c$；

(b) 点点收敛拓扑$\mathscr{T}_\sigma$；

(c) 在X中全的子集D上的点点收敛拓扑$\mathscr{T}_\sigma(D)$。

证 设$\mathscr{B}$是X中的由有界集组成的集族，$\mathscr{E}$是Y'中的等度连续集合，则$\mathscr{L}(X, Y)$上的$\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$拓扑由拟范数族$\{p_{B,A}(T)\mid B\in\mathscr{B}, A\in\mathscr{E}\}$决定，由于

$$
\begin{aligned}
p_{B,A}(T) &= \sup_{x\in B,\varphi\in A}|\langle\varphi, Tx\rangle| \\
&= \sup_{x\in B,\varphi\in A}|\langle T'\varphi, x\rangle| \\
&= \sup_{\varphi\in A} p^B(T'\varphi).
\end{aligned}
$$

所以定向点列$T_\alpha\xrightarrow{\mathscr{T}_{\mathscr{B}}}T$的充要条件为：在每个等度连续集合$A\in\mathscr{E}$上，$T'_\alpha\varphi$按$X'$中的$\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$拓扑一致收敛到$T'\varphi$。因为$M$是$\mathscr{L}(X, Y)$中的等度连续集合，故根据定理4可知，$M'(A)(A\in\mathscr{E})$是$X'$中的等度连续集合。因此由第3章§6中的定理6，在$M'(A)$上，关于$X$中完全有界集上的一致收敛拓扑、$\sigma(X', X)$拓扑以及

$\sigma(X', D)$三者是一致的。由此可知道，在 M 上，(a)、(b)、(c) 三个一致收敛拓扑也是相等的。证毕。

设 X、Y 是局部凸空间。记 $L^*(X, Y)$为由 X 到 Y 的线性映照(不一定连续)全体按照通常运算组成的线性空间。很明显，$\mathscr{L}(X, Y)\subset L^*(X, Y)$。当 $Y=K$ 时，$L^*(X, K)=X^*$。用同样方法可以在 $L^*(X, Y)$ 上引进点点收敛拓扑$\mathscr{T}_\sigma$，它是由拟范数族 $\{p_{x,\alpha}(T), \alpha\in\mathscr{A}, x\in X\}$决定的：

$$p_{x,\alpha}(T)=p_\alpha(Tx),$$

其中 $\{p_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$为 Y 上连续拟范数全体。

容易知道，$\mathscr{L}_\sigma(X, Y)$按恒等嵌入可以看作 $L^*_\sigma(X, Y)$ 的子空间。在此先讨论一下 $L^*_\sigma(X, Y)$ 的构造：设 $\{x_\alpha\}\alpha\in A$ 是 X 中的 Hamel 基(即线性基)，对每一个 x_α，定义 $Tx_\alpha\in Y$，则可以把 T 按线性延拓为 X 到 Y 的线性映照 T。反过来，$L^*_\sigma(X, Y)$中的每一个线性映照都可以用这种方法定义。所以 $L^*_\sigma(X, Y)$ 代数同构于 $Y^A=\prod\limits_{\alpha\in A}Y_\alpha$，其中 $Y_\alpha=Y$。如果 Y^A 上赋以局部凸空间 $Y_\alpha=Y$ 的乘积拓扑，则 $L^*_\sigma(X, Y)$ 拓扑同构于 Y^A。

(VI) 设M是 $\mathscr{L}(X, Y)$中的等度连续子集，$\overline{M}$是M在 $L^*_\sigma(X, Y)$中的闭包，则 $\overline{M}\subset\mathscr{L}(X, Y)$，并且仍是等度连续的。

证　设 $T_0\in\overline{M}$，对于 Y 中 0 的任一均衡凸闭环境 V，根据定理 3，存在 $U\in\mathscr{N}(X)$，使 $M(U)\subset V$。对固定的点 $x\in U$，T_0x 是 $M(x)$ 的接触点，由于 V 是闭的，所以 $T_0(U)\subset V$，即知 $T_0\in\mathscr{L}(X,Y)$，并且$\overline{M}$是等度连续的。证毕。

下面给出 Alaoglu-Bourbaki 定理的推广：

定理 9 (Grothendieck)　设 X、Y 是局部凸空间，则 $\mathscr{L}(X, Y)$ 的下述性质是等价的：

(a) $\mathscr{L}(X, Y)$ 中的每个等度连续集合 M 是相对$\mathscr{T}_\sigma$拓扑紧的；

(b) Y 中每个有界集是相对紧的。

证　(b)⇒(a)：设 $M\subset\mathscr{L}(X, Y)$是等度连续集合，$\overline{M}$ 表示 M

在$L_\sigma^*(X, Y)$中的闭包。由性质(Ⅵ)知，$\overline{M}\subset\mathscr{L}(X, Y)$，且是等度连续的。根据条件(b)，$Y$中的每个有界集是相对紧的，所以$L_\sigma^*(X, Y)\cong Y^A$中的每个有界集是相对$\mathscr{T}_\sigma$紧的。由性质(Ⅴ)，等度连续集合$\overline{M}$是$\mathscr{T}_\sigma$有界集，所以$\overline{M}$是$L_\sigma^*(X, Y)$中的$\mathscr{T}_\sigma$紧集。由于

$$\overline{M}\subset\mathscr{L}_\sigma(X, Y)\subset L_\sigma^*(X, Y),$$

可知$\overline{M}$也是$\mathscr{L}_\sigma(X, Y)$中的紧集，所以M是相对$\mathscr{T}_\sigma$拓扑紧的。

(a)⇒(b)：如果Y中包含有界集B，但不是相对紧的，则可构造$\mathscr{L}(X, Y)$中的等度连续集合M，但不是相对$\mathscr{T}_\sigma$紧的。这就与(a)的假设相矛盾，从而(b)必须成立。

对于$y\in Y$以及X'中某个非零元f_0，可如下定义X到Y的线性映照：

$$f_0\otimes y: x\mapsto f_0(x)y.$$

很明显，$f_0\otimes y\in\mathscr{L}(X, Y)$。令$M=\{f_0\otimes y, y\in B\}$，我们首先证明$M$是等度连续集合。设$V\in\mathscr{N}(Y)$，由于$B$是有界集，必存在$\lambda$，使当$|\alpha|\leqslant\lambda$时，$\alpha B\subset V$。由于$f_0\in X'$，所以必存在$U\in\mathscr{N}(X)$，使当

$$x\in U\Rightarrow|f_0(x)|\leqslant\lambda.$$

这样对每一个$y\in B$，有

$$(f_0\otimes y)(U)=f_0(U)y\subset V,$$

即M是等度连续的。

其次证明M不是$\mathscr{T}_\sigma$相对紧的。取$x_0\in X$，使$f_0(x_0)\neq 0$，则易知$T\to Tx_0$是由$\mathscr{L}_\sigma(X, Y)$到Y的连续映照。如果M是相对$\mathscr{T}_\sigma$紧的，则$M(x_0)$将是Y中的相对紧集。但因$M(x_0)=f_0(x_0)B$，由B的选取可知，M不是$\mathscr{T}_\sigma$相对紧的，定理由此得证。

定理 10 (Banach-Steinhaus) 设X是桶式空间；Y是局部凸空间，$\mathscr{L}(X, Y)$中的定向点列T_ν点点收敛到线性映照$T: X\to Y$。如果对于每一个点$x\in X$，$\{T_\nu x\}$在Y中有界，则$T\in\mathscr{L}(X, Y)$，并且按拓扑$\mathscr{T}_C$，$T_\nu\to T$。

证 由假设$\{T_\nu\}$是点点有界的，因为X是桶式空间，根据定理

5，$\{T_\nu\}$ 是等度连续集合．由性质(Ⅵ) 知 $T\in\mathscr{L}(X,Y)$，所以按 $\mathscr{T}_\sigma$ 拓扑，$T_\nu\to T$．又由定理 8 可知道，在等度连续集合 $\{T_\nu\}\cup\{T\}$ 上，$\mathscr{T}_\sigma$ 拓扑和 $\mathscr{T}_C$ 拓扑是一致的．所以按拓扑 $\mathscr{T}_C$，$T_\nu\to T$．证毕．

注　对于序列的情形，如果 $T_nx\to Tx$，则 $\{T_nx\}$ 在 Y 中总是有界的，但对于定向点列 T_ν 的情形，由 $T_\nu x\to Tx$ 一般并不能推得 $\{T_\nu x\}$ 的有界性，因在局部凸空间中的收敛定向点列可以是无界的．对于序列的情形，定理 10 中的 X 是桶式空间的条件可以放宽为可数桶式空间，结论仍保持成立．这是因为：对于 $M=\{T_n\}$，定理 5 的结论对可数桶式空间保持成立．在定理 5 的证明中，只要考虑到桶 $M^{-1}(V)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}T_n^{-1}(V)$ 是 X 中可列个 0 的均衡凸闭环境的交，所以是 0 的环境，因此 $\{T_n\}$ 是等度连续集合．

由于对于 $\mathscr{L}(X,Y)$，Alaoglu–Bourbaki 定理不一定成立．所以下述 $\mathscr{T}_\sigma$ 拓扑可距离化的结论并不是平行的推论．

定理 11　设 X 是可分的局部凸空间，Y 是可距离化的局部凸空间，则在 $\mathscr{L}(X,Y)$ 的每一个等度连续集合 M 上，点点收敛拓扑 $\mathscr{T}_\sigma$ 可以距离化．

证　设 N 是 X 中可数稠密子集，则 N 是 X 中全的子集．令 $\mathscr{T}_\sigma(N)$ 为在 N 上的点点收敛拓扑，由定义直接可知道 $\mathscr{L}(X,Y)$ 关于 $\mathscr{T}_\sigma(N)$ 是可距离化的．在等度连续集合 M 上，根据定理 8 可知道 $\mathscr{T}_\sigma$ 拓扑和 $\mathscr{T}_\sigma(N)$ 拓扑是一致的．所以在 M 上关于 $\mathscr{T}_\sigma$ 可距离化．证毕．

下面再叙述一些关于完备性的结果．首先证明：

(Ⅶ) 设 X、Y 是局部凸空间，则 $(X',T_{\mathscr{B}})$ 拓扑同构于 $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X,Y)$ 的一个可补子空间 H_1；而 Y 拓扑同构于 $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X,Y)$ 的一个可补子空间 H_2．

证　(a) 取 Y 中某个非零元 y_0．定义 $(X',T_{\mathscr{B}})$ 到 $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X,Y)$ 的一对一线性映照 J_1：$f\mapsto f\otimes y_0$．其中

$$f\otimes y_0:x\mapsto\langle f,x\rangle y_0,\ x\in X.$$

记 J_1 的值域为 $H_1=\{f\otimes y_0,f\in X'\}$，则 J_1 是 $(X',T_{\mathscr{B}})$ 到 H_1 上的

拓扑同构映照。事实上，设 $\{p_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$ 是 Y 上的连续拟范数全体，$\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X, Y)$ 中的 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ 拓扑由拟范数族 $\{p_{B,\alpha}(T)\,|\,B\in\mathscr{B}, \alpha\in\mathscr{A}\}$ 决定。当 $T\in H_1$ 时，由

$$p_{B,\alpha}(f\otimes y_0)=\sup_{x\in B} p_\alpha(\langle f, x\rangle y_0)$$
$$=\sup_{x\in B}|\langle f, x\rangle|p_\alpha(y_0)$$

即知 J_1 是 $(X', T_{\mathscr{B}})$ 到 H_1 上的拓扑映照。

再证 H_1 是可补子空间。选取 $\varphi_0\in Y'$，使得 $\varphi_0(y_0)=1$，定义从 $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X, Y)$ 到 $(X', T_{\mathscr{B}})$ 的线性映照

$$K_1: T\to\varphi_0\circ T,\ T\in\mathscr{L}(X, Y).$$

由于
$$\sup_{x\in B}|\langle\varphi_0\circ T, x\rangle|=\sup_{x\in B}|\langle\varphi_0, Tx\rangle|,$$

即知 K_1 是连续线性映照。定义 $P_1=J_1K_1$，容易验证 $P_1^2=P_1$。由第一章§10中的引理1即知 $H_1=R(P_1)$ 和 $R(I-P_1)$ 是拓扑补子空间。

(b) 类似地，定义 Y 到 $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X, Y)$ 的线性映照 $J_2y=f_0\otimes y$，其中 $f_0\in X'$，$f_0\neq 0$，以及 $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X, Y)$ 到 Y 的线性映照 $K_2T=Tx_0$，其中 $x_0\in X$，$f_0(x_0)=1$。其余的和(a)是一样的。证毕。

定理 12 设 X、Y 是局部凸空间。如果 $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X, Y)$ 是完备的，则 Y 是完备的，并且 $(X', T_{\mathscr{B}})$ 也是完备的。

证 由性质(VII)知，Y 拓扑同构于 $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X, Y)$ 的可补子空间 H_2，而 H_2 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X, Y)$ 中的闭集，所以 Y 必须是完备的。同样可以证明 $(X', T_{\mathscr{B}})$ 是完备的局部凸空间。证毕。

下述定理表明定理12中的必要条件在许多情况下也是充分的。

定理 13(Grothendieck) 设 X、Y 是局部凸空间，X 是 Mackey 空间，$\mathscr{B}$ 是由 X 中的有界集组成的集族，$\mathscr{B}$ 覆盖 X。如果 Y 和 $(X', T_{\mathscr{B}})$ 是完备的，则局部凸空间 $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X, Y)$ 是完备的。

证 设 T_ν 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X, Y)$ 中的基本定向点列。因 $\mathscr{B}$ 覆盖 X，$\mathscr{T}_\sigma\subset\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$。对于每一个 $x\in X$，$T_\nu x$ 是 Y 中的基本定向点列。因为 Y 是完备的，故可以定义一个线性映照 $T_0: X\to Y$，使

$$T_0x=\lim T_v x,\ x\in X.$$

因为 T_v 关于 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ 拓扑是基本定向点列，所以对于每个集 $B\in\mathscr{B}$，在 B 上 T_v 一致收敛到 T_0。所以只要证明 $T_0\in\mathscr{L}(X,Y)$ 即可。由于X是 Mackey 空间，根据§1 中的定理 5 的推论 3，只要证明 T_0 是 σ-连续的。与此等价地，即要证明：对于每个 $\varphi\in Y'$ 必有 $T_0'\varphi\in X'$。由于在每个 $B\in\mathscr{B}$ 上，T_v 一致收敛到 T_0，所以 $T_v'\varphi$ 在每个 $B\in\mathscr{B}$ 上一致收敛到 $T_0'\varphi$。由假定 $(X',T_{\mathscr{B}})$ 是完备的，故 $T_0'\varphi\in X'$。证毕。

从以上证明可知，如果在定理 13 中仅假定Y是有界完备的，则可知 $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X,Y)$ 是有界完备的。

推论 1　设X是囿空间，Y 是完备局部凸空间。$\mathscr{B}$ 包含X中所有收敛于 0 的序列，则 $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X,Y)$ 是完备的。

证　由第 3 章 §6 知，囿空间是 Mazur 空间，并且 (X',T_{C0}) 必是完备的。由假设，$\mathscr{B}$ 中包含 X 中所有 0 序列，所以 $T_{\mathscr{B}}$ 是比 T_{C_0} 更强的可允许拓扑，因而由第 3 章 §4 中的定理 4，$(X',T_{\mathscr{B}})$ 必是完备的。同时囿空间必是 Mackey 空间，所以由定理 13 即知 $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X,Y)$ 是完备的。证毕。

注　考虑到囿空间的性质，如果把 $\mathscr{B}$ 包含X中所有 0 序列这个条件改为 $\mathscr{B}$ 包含X中所有有界地收敛于 0 的序列（即 Mackey 意义下收敛于 0），推论 1 的结论仍然成立。

推论 2　设X是桶式空间，Y 是有界完备的局部凸空间，则 $\mathscr{L}_{\sigma}(X,Y)$ 是有界完备的。

证　在定理 13 的证明中，T_v 点点收敛到 T_0。由 Banach-Steinhaus 定理即知 $T_0\in\mathscr{L}(X,Y)$。证毕。

推论 3　设X是拟桶式空间，Y 是有界完备局部凸空间，则 $\mathscr{L}_{\beta}(X,Y)$ 是有界完备的。

§5　双线性映照

设 E，F，G 是线性空间，从 $E\times F$ 到 G 的映照 f 称为双线性

映照，如果对每一个 $x\in E$，$y\in F$，映照 $f_x: y\mapsto f(x, y)$ 及 $f_y: x\mapsto f(x, y)$ 都是线性的。如果 E, F, G 是线性拓扑空间，则 $f: E\times F\to G$ 是连续的充要条件为 f 在 $(0, 0)$ 点连续。同时双线性映照的集合 M 是等度连续的充要条件为 M 在 $(0, 0)$ 点等度连续。

双线性映照 $f: E\times F\to G$ 称为各别连续的，如果所有 f_x 及 f_y 都是连续的，即对每个 $x\in E$，$f_x\in\mathscr{L}(F, G)$，同时对每个 $y\in F$，$f_y\in\mathscr{L}(E, G)$。$E\times F\to G$ 的双线性映照族 M 称为各别等度连续的，如果对于每一个 $x\in E$，$y\in F$，集合 $\{f_x, f\in M\}$ 与 $\{f_y, f\in M\}$ 都是等度连续的。

如果 $G=K$，则 $E\times F$ 到 G 的双线性映照称为 $E\times F$ 上的双线性泛函。

定理 1 (Bourbaki) 设 E 是可距离化的桶式空间，F 是线性距离空间，G 是局部凸空间，M 是一族 $E\times F\to G$ 的双线性泛函，则每个各别等度连续集合 M 是等度连续的。

证 由于当 $f\in M$ 时，有恒等式

$$f(x, y)-f(x_0, y_0)=f(x-x_0, y-y_0)+f(x-x_0, y_0)+f(x_0, y-y_0).$$

为要证明 M 是等度连续的，只要证明 M 在 $(0, 0)$ 点是等度连续的即可。设 $\{U_n\}$ 与 $\{V_n\}$ 分别是 E、F 中的 0 点的环境基，且满足下述包含关系：$U_{n+1}\subset U_n$，$V_{n+1}\subset V_n (n\in N)$。则 $\{U_n\times V_n\}$ 是 $E\times F$ 中 0 的环境基。如果 M 不在 $(0, 0)$ 点等度连续，则必存在 $W_0\in\mathscr{N}(G)$，使对于点 $x_n\in U_n$、$y_n\in V_n$ 以及 $f_n\in M$，有 $f_n(x_n, y_n)\overline{\in} W_0$，我们证明这是不可能的。

事实上，由于 $\{f_z, f\in M\}$ 是 $\mathscr{L}(F, G)$ 中的等度连续集合，由 §4 中的(Ⅴ)可知，它是 $\mathscr{L}(F, G)$ 中的 $\mathscr{T}_s$ 拓扑有界集。由于 F 中的 0 序列 $\{y_n\}$ 是完全有界集，根据 §4 中的定理 1，$\{f_x(\{y_n\}), f\in M\}$ 是 G 中的有界集。所以线性映照族 $\{x\mapsto f_n(x, y_n), n\in N\}$ 是 $\mathscr{L}(E, G)$ 中的点点有界集，根据 §4 中的定理 5，它是等度连续的，必存在 $U\in\mathscr{N}(E)$，使得

$$f_n(U, y_n)\subset W_0 (n=1, 2, \cdots). \tag{1}$$

因为 $\{x_n\}$ 是 E 中的 0 序列，(1) 式与假定 $f_n(x_n, y_n)\overline{\in}W_0(n\in N)$ 相矛盾。证毕。

推论 1 在定理 1 的假设下，每个从 $E\times F$ 到 G 的各别连续双线性映照必是连续的。

推论 2 设 E、F 是可距离化的桶式空间，G 是局部凸空间，M 是从 $E\times F$ 到 G 的各别连续双线性映照集合。如果对于每个 $(x, y)\in E\times F$，$\{f(x, y), f\in M\}$ 是 G 中的有界集，则 M 是等度连续的。

证 根据 §4 中的定理 5 知：M 是各别等度连续的。

特别是，当 E、F 是 (F) 空间时，推论 2 成立。对于各别连续的双线性映照，一般地不一定是连续的。

例 1 设 E 是无限维局部凸空间，E' 是共轭空间，记 $E'_{\sigma*}=(E', \sigma(E', E))$，考虑由 $E'_{\sigma*}\times E$ 到数域 K 的典型双线性泛函

$$B(f, x)=\langle f, x\rangle,$$

因为 $B_f=f\in E'$ 以及 $B_x=x$ 在 E' 上是 σ^* 连续的，所以 B 是各别连续的。

但是 B 不是连续的。设 U 是 $E'_{\sigma*}$ 中 0 的均衡凸环境，M 是 E 中的子集，使当 $x\in M$, $f\in U$ 时，$|\langle f, x\rangle|\leqslant 1$，推得 $M\subset U^0$，因而是有限维的，所以 M 决不会是无限维局部凸空间 E 中 0 的环境，这表明 B 不是连续的双线性泛函。

下述亚连续的概念是界于各别连续和连续之间的。

设 E、F、G 是局部凸空间，用 $B(E\times F, G)$ 表示所有从 $E\times F\to G$ 的双线性映照 f 所组成的线性空间，$B(E\times F)$ 表示 $E\times F$ 上的双线性泛函全体组成的线性空间。设 $f\in B(E\times F, G)$ 则 $f_x\in L^*(F, G)$, $f_y\in L^*(E, G)$，令 $\tilde{f}: x\mapsto f_x$，则 $\tilde{f}\in L^*(E, L^*(F, G))$。同样，$\tilde{\tilde{f}}: y\mapsto f_y$, $\tilde{\tilde{f}}\in L^*(F, L^*(E, G))$。容易知道，有 $f(x, y)=(\tilde{f}x)(y)=f_x(y)$ 以及 $f(x, y)=(\tilde{\tilde{f}}y)(x)=f_y(x)$。

我们用 $\mathscr{B}(E\times F, G)$ 和 $\mathfrak{B}(E\times F, G)$ 分别表示从 $E\times F\to G$ 的连续和各别连续的双线性映照全体组成的线性空间。而 $\mathscr{B}(E\times F)$ 和 $\mathfrak{B}(E\times F)$ 分别表示连续和各别连续的双线性泛函全体组成的线性空间。

(I) 在对应 $f \to \tilde{f} \to \tilde{\tilde{f}}$ 下，可得到如下的代数同构：

$$\mathfrak{B}(E\times F, G)\cong\mathscr{L}(E, \mathscr{L}_\sigma(F, G))\cong\mathscr{L}(F, \mathscr{L}_\sigma(E, G));$$

$$\mathfrak{B}(E\times F)\cong\mathscr{L}(E, F'_{\sigma*})\cong\mathscr{L}(F, E'_{\sigma*}).$$

证 根据对称性，只要证明 $\mathfrak{B}(E\times F, G)\cong\mathscr{L}(E, \mathscr{L}_\sigma(F, G))$，设 $f\in\mathfrak{B}(E\times F, G)$。则由定义 $\tilde{f}\in L^*(E, \mathscr{L}(F, G))$，必须证明 $\tilde{f}$ 是 E 到 $\mathscr{L}_\sigma(F, G)$ 的连续映照。取 $\mathscr{L}_\sigma(F, G)$ 中 0 点的环境：

$$U(M, V)=\{T\in\mathscr{L}(F, G)\mid T(M)\subset V\},$$

其中 M 是 F 中的有限点集，$V\in\mathscr{N}(G)$。由于 f_y 是连续的，故必存在 $W\in\mathscr{N}(E)$，使 $f(W, M)\subset V$，即有 $(\tilde{f}(W))(M)\subset V$，这表示当 $x\in W$ 时，$\tilde{f}(W)\subset U(M, V)$。即证明了 $\tilde{f}\in\mathscr{L}(E, \mathscr{L}_\sigma(F, G))$。

反之，如果 $\tilde{f}\in\mathscr{L}(E, \mathscr{L}_\sigma(F, G))$，可如下定义 $f\in B(E\times F, G)$：

$$f(x, y)=(\tilde{f}x)(y),\ (x, y)\in E\times F.$$

我们证明 f 是各别连续的。显然有 $f_x=\tilde{f}x\in\mathscr{L}(F, G)$。设 $y\in F$，对任一 $V\in\mathscr{N}(G)$，取 $\mathscr{L}_\sigma(F, G)$ 中 0 的环境 $U(y, V)$，由 $\tilde{f}$ 的连续性，存在 $W\in\mathscr{N}(E)$，使得 $\tilde{f}(W)\subset U(y, V)$，即 $f(W, y)\subset V$，$f_y(W)\subset V$。所以 $f_y\in\mathscr{L}(E, G)$。
证毕。

定义 设 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 分别是 E、F 中的由有界集所组成的集族。f 是 $E\times F\to G$ 的各别连续双线性映照，如果对于每个 $A\in\mathscr{A}$ 以及任一 $W\in\mathscr{N}(G)$，存在 $V\in\mathscr{N}(F)$，使得 $f(A, V)\subset W$，则称 f 为 $\mathscr{A}$-亚连续的。

由定义可知：$f\in\mathfrak{B}(E\times F, G)$ 是 $\mathscr{A}$-亚连续的充要条件为：对每一个 $A\in\mathscr{A}$，$\{f_x, x\in A\}$ 是 $\mathscr{L}(F, G)$ 中的等度连续集合。类似地，f 是 $\mathscr{B}$-亚连续的是指：对每一个 $B\in\mathscr{B}$，$\{f_y, y\in B\}$ 是 $\mathscr{L}(E, G)$ 中的等度连续集合。如果 f 同时是 $\mathscr{A}$-亚连续的及 $\mathscr{B}$-亚连续的，则称 f 是 $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$-亚连续的。如果 $\mathscr{F}$ 表示有限点集全体组成的集类，则 $(\mathscr{F}, \mathscr{F})$-亚连续和各别连续是等价的。在亚连续中，最强的情形是 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 分别为 E、F 中的有界集全体，这时就称

f 为亚连续的。我们分别用 $\mathscr{X}^{\mathscr{A}}(E\times F,G)$、$\mathscr{X}^{(\mathscr{A},\mathscr{B})}(E\times F,G)$ 及 $\mathscr{X}(E\times F,G)$ 表示由所有 $E\times F$ 到 G 的 $\mathscr{A}$-亚连续、$(\mathscr{A},\mathscr{B})$-亚连续及亚连续双线性映照全体组成的线性空间。而 $\mathscr{X}^{\mathscr{A}}(E\times F)$、$\mathscr{X}^{(\mathscr{A},\mathscr{B})}(E\times F)$ 及 $\mathscr{X}(E\times F)$ 分别表示相应的双线性泛函所对应的空间。

类似于 (I)，我们有下述结论，其证明留给读者。

(II) $f\in \mathfrak{B}(E\times F,\ G)$ 是 $\mathscr{A}$-亚连续的充要条件为 $\tilde{\tilde{f}}\in \mathscr{L}(F,\ \mathscr{L}_{\mathscr{A}}(E,\ G))$，所以 $\mathscr{X}^{\mathscr{A}}(E\times F,\ G)$ 和 $\mathscr{L}(F,\ \mathscr{L}_{\mathscr{A}}(E,\ G))$ 代数同构。

由(II)和 §4 中的性质(II)即知：$\mathscr{A}$-亚连续和 $\tilde{\mathscr{A}}$-亚连续是一致的，所以不妨假设 $\mathscr{A}$ 是饱和集族。

(III) $f\in \mathfrak{B}(E\times F)$ 是连续的充要条件为：$\tilde{f}$ 映照 E 中 0 的某环境为 F' 中的等度连续集合。或者 $\tilde{\tilde{f}}$ 映照 F 中 0 的某环境为 E' 中的等度连续集合。

关于亚连续性，有下述重要性质：

定理 2　(a) 如果 $f\in \mathscr{X}^{\mathscr{A}}(E\times F,\ G)$，则对于每一个 $A\in \mathscr{A}$，f 在 $A\times F$ 上是连续的；(b) 如果 $f\in \mathscr{X}^{(\mathscr{A},\mathscr{B})}(E\times F,G)$，则对于每一个 $A\in \mathscr{A}$ 及 $B\in \mathscr{B}$，f 在 $A\times B$ 上是一致连续的。

证　(a) 设 $(x_0,y_0)\in A\times F$，我们需要找到 $U\in \mathscr{N}(E)$ 及 $V\in \mathscr{N}(F)$，使得当 $(x,y)\in ((x_0,y_0)+(U\times V))\cap(A\times F)$ 时，有 $f(x,y)-f(x_0,\ y_0)\in W$。利用恒等式

$$f(x,\ y)-f(x_0,\ y_0)=f(x,\ y-y_0)+f(x-x_0,\ y_0),$$

对 G 中 0 的任一环境 W，取 $W_1\in \mathscr{N}(G)$，使 $W_1+W_1\subset W$。因为 f 是 $\mathscr{A}$-亚连续的，存在 $V\in \mathscr{N}(F)$，使 $f(A,\ V)\subset W_1$。又因为 f_{y_0} 是连续的，存在 $U\in \mathscr{N}(E)$，使 $f(U,\ y_0)\subset W_1$，所以当 $(x,\ y)\in ((x_0,\ y_0)+(U\times V))\cap(A\times F)$ 时，有

$$\begin{aligned} f(x,\ y)-f(x_0,\ y_0)&\subset f(A,\ V)+f(U,\ y_0)\\ &\subset W_1+W_1\subset W, \end{aligned}$$

即知 f 在 $A\times F$ 上是连续的。

(b) 设 x_1、$x_2\in A$，y_1、$y_2\in B$，因 f 是 $(\mathscr{A},\ \mathscr{B})$-亚连续的，对任一 $W\in \mathscr{N}(G)$，取 $W_1\in \mathscr{N}(G)$，使 $W_1+W_1\subset W$。则存在 $U\in$

$\mathscr{N}(E)$，使 $f(U\times B)\subset W_1$。同时，存在 $V\in\mathscr{N}(F)$，使 $f(A\times V)\subset W_1$。那末当 $x_1-x_2\in U$，$y_1-y_2\in V$ 时，有

$$f(x_1, y_1)-f(x_2, y_2)=f(x_1, y_1-y_2)+f(x_1-x_2, y_2)$$
$$\subset W_1+W_1\subset W.$$

所以 f 在 $A\times B$ 上一致连续。证毕。

推论 亚连续双线性泛函 f 必序列连续。

证 设分别按 E、F 上的拓扑 $x_n\to x_0$，$y_n\to y_0$。因为 $A=\{x_n\}\cup\{x_0\}$ 是 E 中的有界集合，由定理 2 中的 (a) 可知道，$f(x, y)$ 在 $A\times F$ 上连续，所以 $f(x_n, y_n)\to f(x_0, y_0)$ $(n\to\infty)$。证毕。

下述连续性定理是在定理 1 中去掉可距离化的条件后的相应结果。

定理 3 设 E 是桶式空间，F、G 是局部凸空间，则

(a) 每一个 $f\in\mathfrak{B}(E\times F, G)$ 是 $\mathscr{B}$-亚连续的，其中 $\mathscr{B}$ 是由 F 中的有界集全体组成的；

(b) 每个各别等度连续集合 M 是 $\mathscr{B}$-等度亚连续的。

证 (a) 根据性质 (Ⅰ)，$\tilde{\tilde{f}}\in\mathscr{L}(F, \mathscr{L}_\sigma(E, G))$，所以对任一 $B\in\mathscr{B}$，$\tilde{\tilde{f}}(B)$ 是 $\mathscr{L}_\sigma(E, G)$ 中的有界集。因为 E 是桶式空间，由 §4 中的定理 5 知，$\tilde{\tilde{f}}(B)$ 是 $\mathscr{L}(E, G)$ 中的等度连续集合，所以对任一 $W\in\mathscr{N}(G)$，必存在 $U\in\mathscr{N}(E)$，使 $\tilde{\tilde{f}}(B)(U)\subset W$，即 $f(U, B)\subset W$，f 是 $\mathscr{B}$-亚连续的。

(b) 设 M 是各别等度连续的。对 $x\in E$ 及 $W\in\mathscr{N}(G)$，必存在 $V\in\mathscr{N}(F)$，使当 $f\in M$ 时，都有 $f(x, V)\subset W$。于是易知，对任一有界集 $B\in\mathscr{B}$，$M(x, B)$ 是 G 中的有界集。由于 $\tilde{\tilde{M}}(B)=\{\tilde{\tilde{f}}(y)|f\in M, y\in B\}$ 是 $\mathscr{L}(E, G)$ 中的点点有界集合，所以是等度连续的。因此必存在 $U\in\mathscr{N}(E)$，使 $\tilde{\tilde{M}}(B)(U)\subset W$，即对每一个 $f\in M$，$f(U, B)\subset W$，M 是 $\mathscr{B}$-等度亚连续的。证毕。

对于连续线性映照 $T\in\mathscr{L}(X, Y)$，T 可唯一地延拓为 $\tilde{T}\in\mathscr{L}(\tilde{X}, \tilde{Y})$，其中 $\tilde{X}$、$\tilde{Y}$ 是 X、Y 的完备化。下面我们对 $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$-亚连续双线性映照考虑类似的问题：

设 E、F 分别是线性拓扑空间 E_1、F_1 的稠密子空间，$\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 分

别是E、F中的有界集族。令$\overline{\mathscr{A}}=\{\overline{A}, A\in\mathscr{A}\}$,$\overline{\mathscr{B}}=\{\overline{B}, B\in\mathscr{B}\}$，其中$\overline{A}$是$A$在$E_1$中的闭包；$\overline{B}$是$B$在$F_1$中的闭包。假设$\overline{\mathscr{A}}$覆盖$E_1$；$\overline{\mathscr{B}}$覆盖$F_1$。$G$是有界完备分离的线性拓扑空间，在这些假设下有下述延拓定理：

定理 4 每一个$(\mathscr{A},\mathscr{B})$-亚连续双线性映照$f\in\mathscr{X}^{(\mathscr{A},\mathscr{B})}(E\times F,G)$可唯一地延拓为$E_1\times F_1\to G$的$(\overline{\mathscr{A}},\overline{\mathscr{B}})$-亚连续双线性映照。

证 不妨假设$\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$是饱和集族，且以包含"$\subset$"为定向集。考虑$\{A\times B\}$和$\{\overline{A}\times\overline{B}\}$，$A\times B$在$\overline{A}\times\overline{B}$中是稠密的。把$f$看作$A\times B$上的映照$f_{A\times B}$，根据定理2，$f$在$A\times B$上一致连续。由于$f$是$(\mathscr{A},\mathscr{B})$-亚连续的，可由定义直接推知$f(A\times B)$是有界的。又因$G$是有界完备的，故由第一章§7所述，$f(A\times B)$可以唯一地延拓为$\overline{A}\times\overline{B}$上的连续映照$\overline{f}_{\overline{A}\times\overline{B}}$。因为定向集族$\{\overline{A}\times\overline{B}|A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}\}$覆盖$E_1\times F_1$，所以用上述方法可以将$f$唯一地延拓到$E_1\times F_1$，记为$\overline{f}$。下面证明$\overline{f}$是双线性和$(\overline{\mathscr{A}},\overline{\mathscr{B}})$-亚连续的。

设$\overline{x}\in E_1$，必有$\overline{A}$，使$\overline{x}\in\overline{A}$。作映照$\phi_{\overline{x}}: y\mapsto\overline{f}(\overline{x}, y)$，$y\in F$。由§4中的性质(VI)可知$\phi_{\overline{x}}\in\mathscr{L}(F,G)$。事实上，因为$f$是$\mathscr{A}$-亚连续的，$\{f_x, x\in A\}$是$\mathscr{L}(F,G)$中的等度连续集，而$\phi_{\overline{x}}$属于$\{f_x, x\in A\}$在$L_\sigma^*(F,G)$中的闭包。而$\phi_{\overline{x}}: F\to G$必可唯一地连续延拓为$F_1$到$G$的连续线性映照，根据唯一性，必定与$\overline{f}_{\overline{x}}: \overline{y}\mapsto\overline{f}(\overline{x},\overline{y})$相一致。所以$\overline{f}_{\overline{x}}$是连续线性映照。与此对称地，$\overline{f}_{\overline{y}}$必也是连续线性的，即$\overline{f}$是各别连续双线性映照。

因f是$\mathscr{A}$-亚连续的，对于每个$A\in\mathscr{A}$及G中0的闭环境W，必存在$V\in\mathscr{N}(F)$，使$f(A,V)\subset W$。以$\overline{V}$表示V在F_1中的闭包。由于$\overline{f}$是各别连续的知$\overline{f}(\overline{A},\overline{V})\subset W$。由第一章§4末尾的结论，$\overline{V}\in\mathscr{N}(F_1)$，所以$f$是$\overline{\mathscr{A}}$-亚连续的，同样可以证明$f$是$\overline{\mathscr{B}}$-亚连续的。证毕。

下面我们考虑双线性映照空间中的局部凸拓扑。

设E、F、G是局部凸空间，$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$分别是E、F中由有界集组成的集族，并且分别覆盖E和F。设D是$\mathscr{B}(E\times F,G)$的子空间。我们可以在D上定义在$\{A\times B, A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}\}$上的一致收敛拓

扑，简称为 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 收敛拓扑，记为 $\mathscr{T}_{\mathscr{A}\times\mathscr{B}}$。但是 $(D,\mathscr{T}_{\mathscr{A}\times\mathscr{B}})$ 一般不是局部凸的。如果对每个 $f\in D$ 及 $A\in\mathscr{A}$，$B\in\mathscr{B}$，$f(A\times B)$ 均是 G 中的有界集，则 D 上的 $\mathscr{T}_{\mathscr{A}\times\mathscr{B}}$ 拓扑是一个向量拓扑，其 0 点的环境准基由集族 $\{\mathscr{U}(A,B,W),A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B},W\in\mathscr{N}(G)\}$ 组成，其中

$$\mathscr{U}(A,B,W)=\{f\in D,f(A\times B)\subset W\}.$$

由于 $\mathscr{A}$ 覆盖 E；$\mathscr{B}$ 覆盖 F，D 上的 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 收敛拓扑满足分离性。容易知道：如果 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 用饱和包 $\widetilde{\mathscr{A}}$、$\widetilde{\mathscr{B}}$ 代替，则 $\widetilde{\mathscr{A}}\times\widetilde{\mathscr{B}}$ 收敛拓扑和 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 收敛拓扑是一致的。如果取 $D=\mathscr{B}(E\times F,G)$，由于对每个连续双线性映照 $f\in\mathscr{B}(E\times F,G)$，对任一 $A\in\mathscr{A}$、$B\in\mathscr{B}$，$f(A\times B)$ 总是 G 中的有界集，所以 $\mathscr{B}(E\times F,G)$ 按 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 收敛拓扑成为局部凸空间。

上述对于每个 $f\in D$，$f(A\times B)$ 是有界的条件是必要的，否则，$\mathscr{U}(A,B,W)$ 就不会全部是吸收的，从而 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 收敛拓扑就不会是一个向量拓扑。事实上，如果 $f\in D$，但 $f(A_0\times B_0)$ 在 G 中无界，其中 $A_0\in\mathscr{A}$、$B_0\in\mathscr{B}$，那末存在 $W\in\mathscr{N}(G)$，W 不吸收 $f(A_0\times B_0)$。这时 $\mathscr{U}(A_0,B_0,W)$ 就不吸收 f。

如果在 $\mathfrak{B}(E\times F,G)$ 上赋以拓扑 $\mathscr{T}_{\mathscr{A}\times\mathscr{B}}$，常常记为 $\mathfrak{B}_{\mathscr{A}\times\mathscr{B}}(E\times F,G)$。如果 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 均取有限点集全体 $\mathscr{F}$，我们称 $\mathscr{T}_{\mathscr{F}\times\mathscr{F}}$ 为点点收敛拓扑，记为 $\mathscr{T}_\sigma$；相应的空间记为 $\mathfrak{B}_\sigma(E\times F,G)$。如果 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 分别取 E、F 中的有界子集全体，记 $\mathscr{T}_{\mathscr{A}\times\mathscr{B}}$ 为 $\mathscr{T}_\beta$，称为双有界拓扑，相应的拓扑空间记为 $\mathfrak{B}_\beta(E\times F,G)$。

(IV) $\mathfrak{B}_{\mathscr{A}\times\mathscr{B}}(E\times F,G)$ 的子空间 $(D,\mathscr{T}_{\mathscr{A}\times\mathscr{B}})$ 是局部凸的充要条件为：对每个 $f\in D$ 及 $A\in\mathscr{A}$、$B\in\mathscr{B}$，$f(A\times B)$ 是 G 中的有界集。

定理 5 如果 $\mathscr{A}$（或 $\mathscr{B}$）仅仅是由 E（或 F）中的强有界集组成的，则 $\mathfrak{B}_{\mathscr{A}\times\mathscr{B}}(E\times F,G)$ 是局部凸空间。

证 只要证明对每一个各别连续双线性映照 f，对 $A\in\mathscr{A}$、$B\in\mathscr{B}$，$f(A\times B)$ 是有界的。根据性质(I)：$\tilde{\tilde{f}}:y\mapsto f_y$ 是 F 到 $\mathscr{L}_\sigma(E,G)$ 的连续线性映照。因为 B 是 F 中的有界集，所以 $\{f_y,\ y\in B\}$ 在

$\mathscr{L}_\sigma(E, G)$ 中是点点有界的。设W是G中 0 的均衡凸闭环境，则 $U=\cap\{f_y^{-1}(W), y\in B\}$是$E$中的均衡凸闭集。由于 $\{f_y, y\in B\}$ 是点点有界的，根据 §4 中的定理 1 的(C)知，U是吸收的。所以U是E中的桶，即是E中 0 的强拓扑$\beta(E,E')$环境。由假定 $A\in\mathscr{A}$是E中的强有界集，所以U吸收A，即知对适当的数λ，$f(A\times B)\subset\lambda w$，所以 $f(A\times B)$是有界的。证毕。

根据第 3 章 §7 中的 Banach-Mackey 定理，即有：

推论 1　如果E(或F)是序列完备的，则 $\mathfrak{B}_{\mathscr{A}\times\mathscr{B}}(E\times F,G)$是局部凸线性拓扑空间。

推论 2　如果$\tilde{\mathscr{A}}$(或$\tilde{\mathscr{B}}$)中的每个均衡凸闭有界集是自完备集，则 $\mathscr{B}_{\mathscr{A}\times\mathscr{B}}(E\times F, G)$是局部凸空间。

例 2　设E、F是线性拓扑空间，E'、F'是共轭空间，取弱*拓扑 $E'_\sigma=(E', \sigma(E',E))$ $F'_\sigma=(F',\sigma(F',F))$。设$\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$分别为$E'_\sigma$、$F'_\sigma$中的等度连续集合全体，则 $\mathfrak{B}(E'_\sigma\times F'_\sigma, G)$ 上的 $\mathscr{T}_{\mathscr{A}\times\mathscr{B}}$ 拓扑称为双等度连续收敛拓扑，记为$\mathscr{T}_e$。相应的空间记为 $\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma; G)$。由于$E'_\sigma$中每个等度连续集合是强有界的，所以根据定理 5 知，$\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma, G)$是局部凸空间。

(V)　设E、F是局部凸空间，则 $\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$ 拓扑同构于 $\mathscr{L}_e(E'_\tau, F)$。同时，$\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$是完备的充要条件为$E$和$F$都是完备的(其中 $E'_\tau=(E', \tau(E', E))$。

证　根据性质 (I)：在映照 $f\mapsto\tilde{f}$下 $\mathfrak{B}(E'_\sigma\times F'_\sigma)$ 代数同构于 $\mathscr{L}(E'_\sigma, F_\sigma)$。根据 §1 中所述知，$\mathscr{L}(E'_\sigma, F_\sigma)$ 和 $\mathscr{L}(E'_\tau, F)$是一样的。设 $f\in\mathfrak{B}(E'_\sigma\times F'_\sigma)$，则 $\tilde{f}\in\mathscr{L}(E'_\tau, F)$。设$M$、$N$分别是$E'$、$F'_\sigma$中的等度连续集合，则由于 $\sup\limits_{u\in M, v\in N}|f(u, v)|\leqslant 1$ 可写为 $\sup\limits_{u\in M, v\in N}|\tilde{f}(u)(v)|\leqslant 1$，它和 $\tilde{f}(M)\subset N^0$ 是等价的。考虑到局部基的具体构成方法，即知 $f\mapsto\tilde{f}$是拓扑同构映照。

关于完备性的结论，可以由 §4 中的定理 12 和定理 13 直接知道。证毕。

§6 拓扑张量积

设 E、F 是线性空间，$B(E\times F)$ 是 $E\times F$ 上的双线性泛函全体组成的线性空间。对每一个 $(x, y)\in E\times F$，可定义 $B(E\times F)$ 上的线性泛函

$$u_{x,y}: f\mapsto f(x, y), f\in B(E\times F).$$

则 $u_{x,y}\in B(E\times F)^*$，其中 $B(E\times F)^*$ 表示 $B(E\times F)$ 上的线性泛函全体。容易知道下述

$$\chi: (x, y)\mapsto u_{x,y}$$

是 $E\times F$ 到 $B(E\times F)^*$ 的双线性映照。令 $\chi(E\times F)=\{u_{x,y}|(x,y)\in E\times F\}$，$\chi(E\times F)$ 在 $B(E\times F)^*$ 中张成的线性子空间记为 $E\otimes F$，称为 E 和 F 的张量积。对 $E\otimes F$ 中的元 $u_{x,y}$ 记为 $x\otimes y$，这样，$E\otimes F$ 中的每一个元都可以表示为有限和：$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i\otimes y_i)$，其中 $x_i\in E, y_i\in F$，λ_i 是数。χ 称为 $E\times F$ 到 $E\otimes F$ 的典型双线性映照。不难直接验证满足下述关系：

$$\lambda(x\otimes y)=(\lambda x)\otimes y=x\otimes(\lambda y);$$

$$(x_1+x_2)\otimes y=x_1\otimes y+x_2\otimes y;$$

$$x\otimes(y_1+y_2)=x\otimes y_1+x\otimes y_2.$$

所以 $E\otimes F$ 中的每一个元都可表示为 $u=\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i$ 的形式。但是要注意，表示方法可以不是唯一的。

对于任意子集 $A\subset E$，$B\subset F$，我们记 $A\otimes B=\chi(A\times B)$。为避免记号混淆，我们约定仅仅当 $M\subset E$ 与 $N\subset F$ 都是子空间的情形，$M\otimes N$ 才表示 $\chi(M\times N)$ 的线性包。

引进"张量积"这一概念之后，就可以把双线性映照空间 $B(E\times F, G)$ 看作线性映照空间 $L^*(E\times F, G)$。

定理 1 设 E、F、G 是线性空间，χ 是 $E\times F$ 到 $E\otimes F$ 的典型双线性映照。则对于每一个 $B\in B(E\times F,G)$，存在唯一的 $\dot{B}\in L^*(E\otimes F, G)$，使得 $B=\dot{B}\chi$，且对应 $B\mapsto\dot{B}$ 是 $B(E\times F, G)$ 与

$L^*(E\otimes F, G)$间的代数同构。

证　考虑映照 $\dot{B}\to B=\dot{B}\chi$，很清楚，它是 $L^*(E\otimes F, G)$ 到 $B(E\times F, G)$的线性映照。首先，映照是一对一的。事实上，如果 $B=0$，则 $\dot{B}(x\otimes y)=B(x, y)=0$ 对每一对 $x\in E$、$y\in F$ 都成立，所以 $\dot{B}=0$。其次证明此映照的值域充满 $B(E\times F, G)$。设 $B\in B(E\times F, G)$，定义

$$\dot{B}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i\right)=\sum_{i=1}^{n} B(x_i, y_i),$$

则 $\dot{B}$ 是 $E\otimes F$ 到G的映照，容易知道，$\dot{B}$ 的定义是相容的，它不依赖于 $E\otimes F$ 中元的不同表示。这样就定义了一个线性映照 $\dot{B}\in L^*(E\otimes F, G)$，并且有 $B=\dot{B}\chi$。证毕。

作为特例，当 $G=K$ 时，可得到：

推论　在对应 $B\mapsto\dot{B}$ 下，$B(E\times F)$与$(E\otimes F)^*$ 代数同构。

对于线性映照 $A\in L^*(E, E_1)$ 与 $B\in L^*(F, F_1)$，我们可以用如下的方法引入张量积 $A\otimes B$。首先定义映照 (A, B)：

$$(A, B)(x, y)=(Ax)\otimes(By),\ x\in E,\ y\in F.$$

则映照 (A, B) 是 $E\times F$ 到 $E_1\otimes F_1$ 的双线性映照。根据定理 1 可知，必对应一个从 $E\otimes F$ 到 $E_1\otimes F_1$ 的线性映照，记为 $A\otimes B$，且

$$(A\otimes B)(x\otimes y)=(Ax)\otimes(By),\ x\in E,\ y\in F.$$

同样可以定义E与F的代数对偶 E^* 与F^* 的张量积 $E^*\otimes F^*$。对于 $f\in E^*$ 以及 $\varphi\in F^*$，有

$$(f\otimes\varphi)(x\otimes y)=f(x)\cdot\varphi(y),\ x\in E,\ y\in F.$$

所以 $f\otimes\varphi$ 是 $E\otimes F$ 上的线性泛函，$E^*\otimes F^*$ 可看作为$(E\otimes F)^*$的子空间。

当 E、F 是局部凸空间时，我们需要在 $E\otimes F$ 上定义有用的局部凸拓扑。我们知道，χ 是局部凸空间 $E\times F$ 到 $E\otimes F$ 的典型双线性映照。可以在 $E\otimes F$ 上定义使得 χ 是连续映照的最精拓扑，但是这样的拓扑不一定是局部凸向量拓扑。$E\otimes F$ 上使 χ 连续的最精局部凸拓扑称为在 $E\otimes F$ 上的投影拓扑，记为 $\mathscr{T}_p$，相应的空间记为 $E\otimes_p E$。如果 E、F 上的局部凸拓扑分别为 $\mathscr{T}_A$、$\mathscr{T}_2$，则也

可记为$\mathscr{T}_p=\mathscr{T}_1\otimes_p\mathscr{T}_2$。

下面我们确定投影拓扑$\mathscr{T}_p$。设$\mathscr{U}$、$\mathscr{V}$分别是E和F中0的环境基．对于$U\in\mathscr{U}$、$V\in\mathscr{V}$，记$U\otimes V=\chi(U\times V)$。下面证明$\{\Gamma(U\otimes V)\,|\,U\in\mathscr{U},V\in\mathscr{V}\}$是$\mathscr{T}_p$拓扑0的一组环境基。

(i) 设U、V分别是E、F中0的均衡凸环境，拟范数$p(x)$、$q(y)$分别是U和V的Minkowski泛函。则在$E\otimes F$上可定义拟范数

$$u\mapsto r(u)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{n}p(x_i)q(y_i)\,\Big|\,u=\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i\right\}.$$

可知$r(u)$是集$\Gamma(U\otimes V)$的Minkowski泛函，并且对于$x\in E$，$y\in F$，均有$r(x\otimes y)=p(x)q(y)$。

证 容易证明$r(u)$是$E\otimes F$上的拟范数，如要证明r是集$\Gamma(U\otimes V)$的Minkowski泛函，只要证明

$$\{u\,|\,r(u)<1\}\subset\Gamma(U\otimes V)\subset\{u\,|\,r(u)\leqslant 1\}.$$

设$u\in\Gamma(U\otimes V)$，则$u=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i\otimes y_i)$，其中$\sum\limits_i|\lambda_i|\leqslant 1$，$x_i\in U$，$y_i\in V$。令$\bar{x}_i=\lambda_i x_i$，$u=\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{x}_i\otimes y_i$，则

$$r(u)\leqslant\sum_{i=1}^{n}p(\bar{x}_i)q(y_i)=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|p(x_i)q(y_i)\leqslant 1.$$

另一方面，如果$r(u)<1$，则存在一个表示

$$u=\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i,$$

使得$\sum\limits_i p(x_i)q(y_i)<1$，所以存在$\varepsilon_i>0$，使$\sum\limits_i\mu_i<1$，其中$\mu_i=(p(x_i)+\varepsilon_i)(q(y_i)+\varepsilon_i)(i=1,\cdots,n)$。令

$$\bar{x}_i=\frac{x_i}{p(x_i)+\varepsilon_i},\quad \bar{y}_i=\frac{y_i}{q(y_i)+\varepsilon_i},$$

则$\bar{x}_i\in U$，$\bar{y}_i\in V$。所以有$u=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(\bar{x}_i\otimes\bar{y}_i)\in\Gamma(U\otimes V)$。

下面证明最后一个结论：设$x_0\in E$，$y_0\in F$，则由Hahn-Banach定理，存在$f\in E'$，使$f(x_0)=p(x_0)$，且$|f(x)|\leqslant p(x)$，$x\in E$。同样存在$g\in F'$，使$g(y_0)=q(y_0)$，且$|g(y)|\leqslant q(y)$，$y\in F$。作

$E\otimes F$ 上的线性泛函 $f\otimes g$，则对于 $u=\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i$，有

$$|(f\otimes g)(u)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}p(x_i)q(y_i),$$

所以 $|(f\otimes g)(u)|\leqslant r(u)$。取 $u=x_0\otimes y_0$，得 $p(x_0)q(y_0)\leqslant r(x_0\otimes y_0)$。另一方面，由定义 $r(x_0\otimes y_0)\leqslant p(x_0)q(y_0)$，得到 $p(x_0)q(y_0)=r(x_0\otimes y_0)$。证毕。

以后我们称拟范数 r 为拟范数 p 与 q 的张量积，记为 $r=p\otimes q$。如果 p、q 分别是 E、F 中的范数，则易证 $p\otimes q$ 也是范数。

定理 2　设 $\mathscr{U}$、$\mathscr{V}$ 分别是局部凸空间 E、F 在 0 点的环境基，则 $\{\Gamma(U\otimes V)\,|\,U\in\mathscr{U},\ V\in\mathscr{V}\}$ 是 $E\otimes F$ 中投影拓扑 $\mathscr{T}_p$ 在 0 的环境基。如果 E、F 上的连续拟范数全体分别为 $\{p_\alpha(x),\ \alpha\in\mathscr{A}\}$，$\{q_\beta(y),\ \beta\in\mathscr{B}\}$，则投影拓扑 $\mathscr{T}_p$ 由拟范数族 $\{p_\alpha\otimes q_\beta,\ \alpha\in\mathscr{A},\ \beta\in\mathscr{B}\}$ 给定。

证　根据性质 (I)，$\Gamma(U\otimes V)$ 是吸收的均衡凸集，由于

$$\Gamma((U_1\cap U_2)\otimes(V_1\cap V_2))\subset\Gamma(U_1\otimes V_1)\cap\Gamma(U_2\otimes V_2),$$

所以 $\{\Gamma(U\otimes V)\,|\,U\in\mathscr{U},\ V\in\mathscr{V}\}$ 是某局部凸拓扑的局部基，可唯一地确定 $E\otimes F$ 上的一个局部凸拓扑，其分离性可以由后面的性质 (II) 知道。由局部基的构成可直接知道，此拓扑即是使 χ 连续的 $E\otimes F$ 上的最精局部凸拓扑 $\mathscr{T}_p$。

后一结论可直接由性质(I)得到。证毕。

定理 3　设 E、F、G 是局部凸空间，$E\otimes_p F$ 是投影张量积，则对应 $\dot{B}\to B=\dot{B}\chi$ 是 $\mathscr{L}(E\otimes_p F,G)$ 到 $\mathscr{B}(E\times F,G)$ 的代数同构，即 $E\otimes_p F$ 到 G 的线性映照 $\dot{B}$ 是连续的充要条件为 $B\in\mathscr{B}(E\times F,G)$。

证　设 $\dot{B}$ 是连续的，由 χ 的连续性即知 $B=\dot{B}\chi$ 是连续的。反之，假定 B 是连续的，W 是 G 中 0 的均衡凸环境，则存在 $E\times F$ 中 0 的环境 $U\times V$，使 $B(U\times V)\subset W$，即 $\dot{B}(U\otimes V)\subset W$，因为 W 是均衡凸集，所以 $\dot{B}(\Gamma(U\otimes V))\subset W$。而 $\Gamma(U\otimes V)$ 是 $(E\otimes F,\ \mathscr{T}_p)$ 中 0 的环境，即知 $\dot{B}$ 是连续的。证毕。

作为特例，有：

推论 $E\otimes_p F$ 的共轭空间 $(E\otimes_p F)'$ 在对应 $\dot{B}\to B$ 下代数同构于 $\mathscr{B}(E\times F)$。并且$(E\otimes_p F)'$ 中的等度连续集合对应$\mathscr{B}(E\times F)$ 中的等度连续集合。

设 $f\in E'$、$g\in F'$，由于 $(f, g)(x, y)=f(x)\cdot g(y), x\in E, y\in F$ 是 $E\times F$ 上的连续双线性泛函，所以，对应 $E\otimes_p F$ 上的连续线性泛函 $(f\otimes g)(x\otimes y)=f(x)g(y)$，即 $f\otimes g\in(E\otimes_p F)'$。由此，$E'\otimes F'\subset(E\otimes_p F)'$。下面证明 $E'\otimes F'$ 在 $E\otimes F$ 上是全的，即对于任一 $u\in E\times F$, $u\neq 0$，存在 $w\in E'\otimes F'$，使 $w\cdot u\neq 0$。事实上，如果 u 有表示 $u=\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i$，其中 $x_1, \cdots, x_n$ 和 $y_1, \cdots, y_n$ 是线性独立的，按 Hahn-Banach 定理，则存在 $f_1\in E'$、$g_1\in F'$，使得 $f_1(x_i)=\delta_{1i}$ 及 $g_1(y_i)=\delta_{1i}(i=1, 2, \cdots, n)$，推得 $f_1\otimes g_1(u)=\Sigma f_1(x_i)g_1(y_i)=1$。所以，$\sigma(E\otimes_p F, (E\otimes_p F)')$ 是分离的，从而 $E\otimes F$ 上的投影拓扑 $\mathscr{T}_p$ 是分离的。

(II) $E'\otimes F'\subset(E\otimes_p F)'$，并且 $E'\otimes F'$ 在 $E\otimes F$ 上是全的。

设 E、F 是局部凸空间，对于 $(E\otimes F, \mathscr{T}_p)$，根据第一章 §5 中的内容，存在一个最小完备化扩张，且在同构意义下是唯一的，记为 $E\tilde{\otimes}_p F$。由定理 2 可知道：如果 E、F 都是可距离化的，则 $E\tilde{\otimes}_p F$ 是(F)空间，即是完备的可距离化局部凸空间，对这种情况，$E\tilde{\otimes}_p F$ 中的元可表示如下：

定理 4 (Grothendieck) 设 E、F 是可距离化局部凸空间，则每一个元 $u\in E\tilde{\otimes}_p F$ 是一个绝对收敛序列的和：

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i\otimes y_i,$$

其中 $\Sigma|\lambda_i|<\infty$，$\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 分别是 E、F 中的 0 序列。

证 设 E、F 上的局部凸拓扑分别由拟范数的增序列 $\{p_n\}$ 与 $\{q_n\}$ 给出。令 $r_n=p_n\otimes q_n(n=1, 2, \cdots)$，则 r_n 也是拟范数的增序列。根据定理 2，$E\otimes F$ 上的投影拓扑 $\mathscr{T}_p$ 由 $\{r_n\}$ 给出。记 $\overline{r}_n$ $(n=1, 2, \cdots)$表示 r_n 在 $E\tilde{\otimes}_p F$ 上的延拓。

设 $u\in E\tilde{\otimes}_p F$，则存在 $E\otimes F$ 中的序列 $\{u_n\}$，使 $\overline{r}_n(u-u_n)<$

$n^{-2}2^{-(n+1)}$。设 u_1 的任一表示为 $u_1=\sum_{i=1}^{i_1}\lambda_i x_i\otimes y_i$。

令
$$v_n=u_{n+1}-u_n(n=1,\ 2,\ \cdots),$$
则
$$r_n(v_n)\leqslant\bar{r}_n(u-u_n)+\bar{r}_n(u-u_{n+1})$$
$$\leqslant\bar{r}_n(u-u_n)+\bar{r}_{n+1}(u-u_{n+1})<n^{-2}2^{-n}.$$
由 $r_n=p_n\otimes q_n$ 的定义可知，v_n 存在一个表示
$$v_n=\sum_{i=i_n+1}^{i_{n+1}}\lambda_i x_i\otimes y_i,$$
使 $p_n(x_i)\leqslant\frac{1}{n}$，$q_n(y_i)\leqslant\frac{1}{n}$ $(i_n<i\leqslant i_{n+1})$，并且 $\sum_{i=i_n+1}^{i_{n+1}}|\lambda_i|\leqslant2^{-n}$。由此得
$$u=u_1+\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i\otimes y_i,$$
并且 $\{x_i\}$、$\{y_i\}$、$\{\lambda_i\}$ 具有所要求的性质。证毕。

下面给出一个投影张量积的例子：

设 $(X,\ \Sigma,\ \mu)$ 是一个测度空间，$L^1(\mu)$ 表示 X 上的实值绝对可积函数全体关于范数 $\|f\|=\int|f|d\mu$ 所构成的 Banach 空间，又设 E 是另一实 Banach 空间，一个 E 值函数若有如下的形式：
$$\Phi(t)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)x_i,\quad t\in X,$$
其中 $x_i\in E$，$\psi_i(t)$ 是集 $S_i\in\Sigma$ 的特征函数，且 $\sum_{i=1}^{n}\mu(s_i)<\infty$，则称 Φ 为 E 值简单函数。用 S_E 表示全体 E 值简单函数组成的向量空间，在线性空间 S_E 上定义拟范数
$$p(\Phi)=\int\|\Phi(t)\|d\mu(t),$$
则 $(S_E,\ p)/p^{-1}(0)$ 是赋范空间，其完备化空间记为 $L_E^1(\mu)$，$L_E^1(\mu)$，称为 E 值 Bochner 可积函数全体所组成的空间。

将证 $L_E^1(\mu)$ 范数同构于 $L^1(\mu)\tilde{\otimes}_p E$。作 $L^1(\mu)\otimes_p E$ 到 $L_E^1(\mu)$ 的自然嵌入 $u\mapsto\tilde{u}$。若 $u=\sum_{i=1}^{n}f_i(t)\otimes x_i$，则对应 $\tilde{u}=\sum_{i=1}^{n}f_i(t)x_i$（严格地讲，应是相应的等价类）。映照 $u\mapsto\tilde{u}$ 是线性的。如果记 S 为 $L^1(\mu)$ 中的简单函数全体，$\tilde{S}_E=S_E/p^{-1}(0)$，则 $u\mapsto\tilde{u}$ 把 $S\otimes E$ 满映到

$\hat{S}_E$. 用 r 表示 $L^1(\mu)$ 及 E 中的范数的张量积. 设 $u\in S\otimes E$, 对任一表示 $u=\sum_{i=1}^{n} g_i\otimes y_i$, 由

$$p(\tilde{u})=\int\left\|\sum_{i=1}^{n} g_i(t)y_i\right\|d\mu(t)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|g_i\|\|y_i\|$$

推得 $p(\tilde{u})\leqslant r(u)$. 另一方面 $u\in S\otimes E$, 则可选择一种表示 $u=\sum_{i=1}^{n}\psi_i\otimes x_i$, 使 ψ_i 的支集 $S_i(S_i=\{t, \psi_i(t)\neq 0\})$ 互不相交.

则由于
$$r(u)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|\psi_i\|\|x_i\|=p(\tilde{u})$$

可知 $r(u)=p(\tilde{u})$, 即在映照 $u\mapsto\tilde{u}$ 下, $S\otimes E$ 范数同构于 $\hat{S}_E$. 由于 S 在 $L^1(\mu)$ 中是稠密的, 故 $S\otimes E$ 在 $L^1(\mu)\tilde{\otimes}_p E$ 中是稠密的. 又 $\hat{S}_E$ 在 $L^1_E(\mu)$ 中是稠密的, 故映照 $u\mapsto\tilde{u}$ 可扩充为 $L^1(\mu)\tilde{\otimes}_p E$ 到 $L^1_E(\mu)$ 的范数同构. 证毕.

如果 E、F、G 是赋范空间, 对 $B\in\mathscr{B}(E\times F, G)$, 可以定义范数

$$\|B\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1}\|B(x, y)\|.$$

由这个范数决定的拓扑即是 $\mathscr{B}(E\times F, G)$ 上的双有界拓扑 $\mathscr{T}_\beta$, 对 $E\times F$ 到 $E\otimes_p F$ 的典型双线性映照 χ, $\|\chi\|=1$, 定理 3 可加强为:

定理 5 设 E、F、G 是赋范空间, 则在对应 $\dot{B}\mapsto B=\dot{B}\chi$ 下, $\mathscr{L}_\beta(E\otimes_p F, G)$ 和 $\mathscr{B}_\beta(E\times F, G)$ 范数同构.

特别是, $(E\otimes_p F)'_\beta=(E\tilde{\otimes}_p F)'_\beta$ 范数同构于 $\mathscr{B}_\beta(E\times F)$ 和 $\mathscr{L}_\beta(E, F'_\beta)$.

证 设 $z=\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i\in E\otimes_p F$, 由于

$$\|\dot{B}z\|=\left\|\sum_{i=1}^{n} B(x_i, y_i)\right\|\leqslant\|B\|\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\cdot\|y_i\|$$

推得 $\|\dot{B}z\|\leqslant\|B\|\cdot\|z\|_p$, 其中 $\|\cdot\|_p$ 表示 $E\otimes_p F$ 中的范数, 所以 $\|\dot{B}\|\leqslant\|B\|$.

反之, $\|B(x, y)\|=\|\dot{B}(x\otimes y)\|\leqslant\|\dot{B}\|\|x\otimes y\|_p=\|\dot{B}\|\|x\|\|y\|$, 所以 $\|B\|\leqslant\|\dot{B}\|$. 由此 $\|\dot{B}\|=\|B\|$.

当 $G=K$ 时，即知 $(E\widetilde{\otimes}_p F)'_\beta$ 范数同构于 $\mathscr{B}_\beta(E\times F)$。而 $\mathscr{B}_\beta(E\times F)$和$\mathscr{L}_\beta(E,F'_\beta)$ 在对应 $B\mapsto\widetilde{B}$ 下范数同构，这可由下述推得：设 U、V 分别为 E、F 中的单位球，$|B(U,V)|\leqslant a$ 等价于 $|\widetilde{B}(U)V|\leqslant a$。证毕。

设 E、F 是局部凸空间，$E\otimes F$ 在代数同构意义下可以看作 $\mathscr{L}(E'_\sigma,F)$ 的子空间。设 $A=(x,y)\in E\times F$，定义 $\widetilde{A}\in\mathscr{L}(E'_\sigma,F)$ 如下：

$$\widetilde{A}u=(ux)y,\ u\in E'.$$

映照 $A\mapsto\widetilde{A}$ 是 $E\times F$ 到 $\mathscr{L}(E'_\sigma,F)$的双线性映照。根据定理 1，存在唯一的从 $E\otimes F$ 到 $\mathscr{L}(E'_\sigma,F)$的线性映照 $\psi(\dot{A})=\widetilde{A}$。对于每个 $\dot{A}\in E\otimes F$，$\psi(\dot{A})$ 是 $\mathscr{L}(E'_\sigma,F)$ 中的有限秩算子。下述性质说明映照 ψ 是一对一的。

(III) 设 $x_i\in E$、$y_i\in F$，如果对于每个 $u\in E'$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\langle u,\ x_i\rangle y_i=0$，则 $\sum\alpha_i x_i\otimes y_i=0$。

证 取由 $x_1,\cdots,x_n$ 张成的子空间的线性无关基 $e_1,\cdots,e_r$ 及由 $y_1,\cdots,y_n$ 张成的子空间的线性无关基 $f_1,\cdots,f_s$，则上式能写为

$$\sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{s}\alpha_{pq}<u,\ e_p>f_q=0,\ u\in E'.$$

如能证明 $\alpha_{pq}=0(p=1,\cdots,r;q=1,\cdots,s)$，则结论就成立。作 $u_i\in E'(i=1,\cdots,r)$，使 $\langle u_i,\ e_p\rangle=\delta_{ip}(p=1,\cdots,r)$。代入上式，得

$$\sum_{q=1}^{s}\alpha_{iq}f_q=0\ \ (i=1,\cdots,r).$$

由于 $f_1,\cdots,f_s$ 线性无关，所以 $\alpha_{ij}=0$。证毕。

相反，如果 $\widetilde{A}$ 是 $\mathscr{L}(E'_\sigma,F)$ 中的有限秩算子，则可表示为 $\widetilde{A}u=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(u)y_i$，其中 y_i 线性无关。取 $v_i\in F'$，使 $v_iy_k=\delta_{ik}$，则

$$\alpha_i(u)=\langle v_i,\ \widetilde{A}u>=<\widetilde{A}'v_i,\ u>=<x_i,\ u>,$$

其中 $x_i\in E$。这样，$\widetilde{A}$ 就同 $\dot{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i$ 对应。由此得：

定理 6 设E、F是局部凸空间，$\dot{A}=\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i\in E\times F$，令

$$\tilde{A}u=\sum_{i=1}^{n}(ux_i)y_i,\ u\in E'.$$

则映照 ψ：$\dot{A}\mapsto\tilde{A}$ 是 $E\otimes F$ 和 $\mathscr{L}(E'_\sigma, F)$中的所有有限秩映照组成的子空间的代数同构。

类似地，有：

定理 7 设E、F是局部凸空间，$\dot{A}=\sum_{i=1}^{n}u_i\otimes v_i\in E'\otimes F'$，令

$$\tilde{A}x=\sum_{i=1}^{n}(u_ix)v_i,\ x\in E,$$

则映照 ψ：$\dot{A}\to\tilde{A}$ 是 $E'\otimes F'$ 和 $\mathscr{L}(E, F'_\sigma)$ 中的所有有限秩映照组成的子空间的代数同构。

定理 8 如果在E或F上取弱拓扑，则

$$(E\otimes_p F)'\cong\mathscr{B}(E\times F)\cong E'\otimes F'.$$

证 只要证明对每一个$B\in\mathscr{B}(E\times F)$对应的$\tilde{B}\in\mathscr{L}(E, F'_\sigma)$是有限秩的，从而根据定理 7 可知，$\mathscr{B}(E\times F)\cong E'\otimes F'$。事实上，根据 §5：如果$B\in\mathfrak{B}(E\times F)$是各别连续的，则$\tilde{B}\in\mathscr{L}(E, F'_\sigma)$。由于$B(U\times V)\leqslant\varepsilon$等价于$\tilde{B}(U)(V)\leqslant\varepsilon$，所以$B\in\mathscr{B}(E\times F)$的充要条件为$\tilde{B}$映照$E$中 0 的某环境$U$为$F'_\sigma$中等度连续集合。由于$F$上赋以弱拓扑，则$F'_\sigma$上的等度连续集合是有限维的，所以$\tilde{B}$是有限秩的。证毕。

在$E\otimes F$上除了定义投影张量积拓扑外，还可以引入各种局部凸拓扑。比较重要的还有$E\otimes F$上归纳(张量积)拓扑$\mathscr{T}_i$。$\mathscr{T}_i$拓扑是$E\otimes F$上的使典型双线性映照χ各别连续的最精局部凸向量拓扑，显然$\mathscr{T}_p\subset\mathscr{T}_i$。类似于定理 3，有：

定理 9 设E、F、G是局部凸空间，记$E\otimes_i F$为归纳张量积，则对应$\dot{B}\mapsto B=\dot{B}\chi$是$\mathscr{L}(E\otimes_i F, G)$和$\mathfrak{B}(E\times F, G)$间的代数同构。即$E\otimes_i F$到$G$的线性映照$\dot{B}$是连续的充要条件为$B$是$E\times F$到$G$的各别连续双线性映照。

推论 $(E\otimes_i F)'\cong\mathfrak{B}(E\times F)$。

如果E是桶式可距离化局部凸空间，F是局部凸线性距离空间。考虑典型双线性映照$\chi: E\times F\to E\otimes_i F$，根据§5定理1可知，各别连续双线性映照$\chi$必连续，所以此时$E\otimes F$上投影张量拓扑和归纳张量拓扑是一致的。

此外，如果把$E\otimes F$看作$E'\otimes F'$上的线性泛函，$(x\otimes y)(f\otimes\psi) = \langle f, x\rangle\langle\psi, y\rangle$，设$\mathscr{E}_1$、$\mathscr{E}_2$分别是$E'$、$F'$上的等度连续集合全体，则在$E\otimes F$上可定义关于$\{S\otimes T\,|\,S\in\mathscr{E}_1, T\in\mathscr{E}_2\}$上的一致收敛拓扑，称为双等度连续收敛拓扑，记为$\mathscr{T}_e$。$E\otimes F$上的$\mathscr{T}_e$拓扑等于$\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$在$E\otimes F$上的导出拓扑，根据§5中的例2可知：$\mathscr{T}_e$是局部凸向量拓扑。由于$S\otimes T(S\in\mathscr{E}_1, T\in\mathscr{E}_2)$是$(E\otimes_p F)'$中的等度连续集合，所以$\mathscr{T}_e\subset\mathscr{T}_p$，记$(E\otimes F, \mathscr{T}_e)$为$E\otimes_e F$，其完备化记为$E\widetilde{\otimes}_e F$。$E\otimes F$上的$\mathscr{T}_e$是比$\mathscr{T}_i$更重要的拓扑。

(IV) $E\otimes_p F$到$\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$中的嵌入是连续的。

(V) 设E、F是完备的局部凸空间，则由$E\otimes_p F$到$\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$（或$\mathscr{L}_e(E'_\tau, F)$）的典型嵌入可唯一地连续延拓到$E\widetilde{\otimes}_p F$上。

证 由§5中的性质(V)，$\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$是完备的。由$\mathscr{T}_e\subset\mathscr{T}_p$，$E\otimes_p F$到$\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$的典型嵌入映照是连续线性映照，即可知道。

最后我们指出：如果E、F是完备的，则$E\widetilde{\otimes}_e F$可看作$E\otimes F$在$\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$中的闭包。

§7 有界、弱紧、紧和核映照

一、有界线性映照

设X、Y是局部凸空间，线性映照$T: X\to Y$称为有界的，如果它映照X中0的某环境U到Y中的有界集。

由于Y中0的每一个环境吸收$T(U)$，所以有界线性算子一定是连续的。如果X是赋范空间，则每个连续线性映照$T: X\to Y$是有界的。这是由于赋范空间X中的单位球是有界集，而连续线性映照把有界集映为有界集。但是如果X不是赋范空间，连续线

性映照不一定有界。例如恒等映照 $I: X\to X$ 不是有界的。容易知道：

(I) 所有有界线性映照 $T: X\to Y$ 的集合是 $\mathscr{L}(X, Y)$ 的线性子空间。有界线性映照和连续线性映照的乘积是有界线性映照。

定理 1 设 X、Y 是局部凸空间，线性映照 $T: X\to Y$ 是有界的充要条件为：存在赋范空间 N 和连续线性映照 $T_1: X\to N$ 以及 $T_2: N\to Y$，使得 $T=T_2\cdot T_1$：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad T \quad} & Y \\ & \searrow_{T_1} \quad N \quad {}^{T_2}\nearrow & \end{array}$$

证 只要证必要性：设 T 把 X 中 0 的环境 U 映为 Y 中有界集，不妨假设 U 是均衡凸闭集。作集 U 的 Minkowski 泛函

$$p(x)=\inf\{\lambda>0\,|\,x\in\lambda U\},\ x\in X,$$

则 $p(x)$ 是 X 上的连续拟范数。设 X_U 是商空间 $X/\{x\,|\,p(x)=0\}$，记 $\hat{x}$ 为 $x\in X$ 在 X_U 中相应的等价类。在 X_U 上定义范数

$$\|\hat{x}\|_U=p(x),\ \hat{x}\in X_U,$$

则典型商映照 $\Phi_U: X\to X_U$ 是连续线性映照。

然后，记 $B=[T(U)]_Y^-$，令 Y_B 是 Y 中由 B 张成的线性子空间，在 Y_B 上定义范数

$$\|y\|_B=\inf\{\lambda>0\,|\,y\in\lambda B\},$$

则典型嵌入映照 $\psi_B: Y_B\to Y$，由于 B 是有界集，ψ_B 是连续的。

这样 $T: X\to Y$ 被分解为连续线性映照的乘积：

$$X\xrightarrow{\Phi_U}X_U\xrightarrow{T_0}Y_B\xrightarrow{\psi_B}Y. \tag{1}$$

这里的线性映照 T_0 是存在的，只要指出 Tx 仅依赖于 X_U 中的等价类 $\hat{x}$。如果 $p(x)=0$，则对所有的 $\lambda\in K$，$\lambda x\in U$，$\lambda Tx=T(\lambda x)\in B$。又由于 B 是有界集，必有 $Tx=0$，因为 $T(U)\subset B$，T_0 的范数至多为 1，所以 T_0 是连续的。设 $T_1=T_0\Phi_U$，$T_2=\psi_B$，或者设 $T_1=\Phi_U$，$T_2=\psi_B T_0$，即可得到定理要求的分解。

推论 如 $T: X\to Y$ 是有界线性映照，那末对偶线性映照 $T': Y'_\beta\to X'_\beta$ 是有界的。

证　因为 T' 可分解为

$$Y'\xrightarrow{T_2'}N'\xrightarrow{T_1'}X'.$$

而 T_2' 是 $Y_B'\to N'$ 的连续线性映照，$T_1':N'\to X_B'$ 也是连续的。

定理 2　设 X 是 Frechet 空间，Y 是局部凸空间，并且在 Y 中存在一列有界集 $\{B_n\}$，使 Y 中的每一个有界集包含在某 B_n 中，则每一个连续线性映照 $T:X\to Y$ 是有界的。

如果 M 是 $\mathscr{L}_\sigma(X,Y)$ 中的有界集，则 M 是等度有界的（即存在 $U\in\mathscr{N}(X)$，使 $M(U)$ 是 Y 中有界集）。

证　只要证明后一结论。我们可以假定 B_n 是均衡凸闭的，$M^{-1}(B_n)=\bigcap\limits_{T\in M}T^{-1}(B_n)$ 也是均衡凸闭的。由假定，对每个 $x\in X$，$M(x)$ 是有界的，由假设必包含在某 B_n 中，所以 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}M^{-1}(B_n)$。由于 X 是 Frechet 空间第二纲的，所以至少有一个 $M^{-1}(B_n)$ 包含一个内点。由 $M^{-1}(B_n)$ 是均衡凸的，易知 $M^{-1}(B_n)$ 即是 X 中 0 的环境。证毕。

如果 Y 是 (DF) 空间，则满足定理中对 Y 的条件，故有：

推论　每一个 Frechet 空间到 (DF) 空间的连续线性映照是有界的。

定理 3　设 X 是 (DF) 空间，Y 是可距离化局部凸空间，则每个连续线性映照 $T:X\to Y$ 是有界的。

如 M 是 X 到 Y 的等度连续线性映照集，则 M 是等度有界的。

证　设 $\{V_n\}$ 是 Y 中 0 的环境的可数基。因 M 是等度连续的，$U_n=M^{-1}(V_n)$ 是 X 中 0 的一列环境。由 X 是 (DF) 空间，存在 $U\in\mathscr{N}(X)$ 被每个 U_n 吸收，则 $M(U)$ 被每个 V_n 吸收，即 $M(U)$ 是有界的。证毕。

二、弱紧线性映照

设 X、Y 是局部凸空间，线性映照 $T:X\to Y$ 称为弱紧的，如果 T 映照某个 $U\in\mathscr{N}(X)$ 到 Y 中的相对弱紧子集。

很清楚，弱紧线性映照是有界的。记所有弱紧线性映照 $T:$

$X\to Y$ 的集合为 $W(X, Y)$。容易证明。

(II) $W(X, Y)$是 $\mathscr{L}(X, Y)$的线性子空间。弱紧线性映照和连续线性映照的乘积是弱紧的。

定理 4 线性映照 $T: X\to Y$ 是弱紧的充要条件为：存在一个 Banach 空间N和连续线性映照 $T_1: X\to N$ 及 $T_2: N\to Y$，使$T=T_2\cdot T_1$，并且N中的单位球B的像$T_2(B)$是Y中的弱紧集。

证 只要证明必要性：设T映照X中0的均衡凸闭环境U到Y中的相对弱紧子集。令 $B=[T(U)]_Y^-$，则B是均衡凸弱紧集。同定理1一样，可建立如(1)的分解。因B是自完备集，Y_B是 Banach 空间，且Y_B中的单位球B是Y中的弱紧集。设$N=Y_B$，$T_1=T_0\Phi_U$，$T_2=\psi_B$，我们即可得到所要求的分解。证毕。

定理 5 设X、Y是 Banach 空间，则对于线性映照 $T: X\to Y$，下述条件是等价的：

(a) T 是弱紧的；

(b) $T': Y'_\tau\to X'_\beta$ 是连续的；

(c) $T': Y'_{\sigma*}\to X'_\sigma$ 是连续的；

(d) $T': Y'_\beta\to X'_\beta$ 是弱紧的；

(e) $T'': X''\to Y''$ 的值域 $R(T'')\subset Y$。

证 (a)$\Longrightarrow$(b)：设T是弱紧的，则T映照X中的每个均衡凸有界子集为Y中的均衡凸相对紧子集，根据§1中的定理4可知：T'是从$(Y', \tau(Y', Y))$到$(X', \beta(X', X))$的连续线性映照。

(b)$\Longrightarrow$(c)：由于$(Y'_\tau)'=Y$，$(X'_\beta)'=X''$，根据§1中的定理1的推论3可知：T'是σ-连续的，即$\sigma(Y', Y)$—$\sigma(X', X'')$连续的。

(c)$\Longrightarrow$(d)：因为Y'中的单位球B'是σ^*紧的，由(c)可知：$T'(B')$是X'中的弱紧子集，即知(d)。

(d)$\Longrightarrow$(e)：设X''中单位球为B''，只要证明$T''(B'')\subset Y$即可。由$T': Y'_\beta\to X'_\beta$是弱紧的，根据(a)$\Longrightarrow$(c)知：$T'': X''\to Y''$是$\sigma(X'', X')$—$\sigma(Y'', Y''')$连续的。设B为X中的单位球，$B=B''\cap X$，B''是B关于$\sigma(X'', X')$的闭包，故$T''(B'')$包含在$T''(B)=$

$=T(B)\subset Y$ 的弱闭包 $[T(B)]^{-}_{\sigma(Y'',Y''')}$ 之中。由于对于凸集弱闭包和强闭包是一致的，所以 $T''(B'')\subset[T(B)]^{-}_{\beta(Y'',Y''')}=[T(B)]^{-}_{Y}\subset Y$。

$(e)\Longrightarrow(a)$：由于 T'' 存在，T'' 是 σ^* 连续的，因为 $R(T'')\subset Y$，T''：$X''\to Y$ 是 $\sigma(X'', X')-\sigma(Y, Y')$连续的。又由于X的单位球 B 在 X'' 中是相对 σ^* 紧的，所以 $T(B)=T''(B)$是Y中相对弱紧集。证毕。

推论 如果X或Y是自反 Banach 空间，则每个连续线性映照 $T:X\to Y$ 是弱紧的。

对于局部凸空间的情形，定理5可作相应的推广。设X、Y是局部凸空间，连续线性映照 $T:X\to Y$ 被称为有界弱紧的，如果 T 映照X中的每一个有界集为Y中的相对弱紧子集。则有

定理6 设X、Y是局部凸空间，则对于连续线性映照 $T:X\to Y$，下述条件是等价的：

(a) T 是有界弱紧的；

(b) $T':X'_{\tau}\to X'_{\beta}$ 是连续的；

(c) $T':X'_{\sigma*}\to X'_{\sigma}$ 是连续的；

(d) $T'':X''\to Y''$ 映照 X'' 到Y中。

定理7 设X、Y是 Banach 空间，则 $W(X, Y)$是 $\mathscr{L}_{\beta}(X, Y)$ 的闭线性子空间。

证 由于 $\mathscr{L}_{\beta}(X, Y)$ 是 Banach 空间，只要证 $W(X, Y)$ 在 $\mathscr{L}_{\beta}(X, Y)$中是完备的。或等价地，对于一列弱紧线性映照 $\{T_n\}$，如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|T_n\|<\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n$ 是弱紧的。这一点可由弱紧映照的定义直接验证。

三、紧线性映照

设X、Y是局部凸空间，线性映照 $T:X\to Y$ 被称为紧的或全连续的，如果 T 映照X中0的某环境 U 为Y中的相对紧集。

显然，紧的线性映照是弱紧的，从而也是有界的。

(III) 紧线性映照 $T:X\to Y$ 的全体，记为 $C_0(X, Y)$，是

$\mathscr{L}(X, Y)$ 的线性子空间。紧线性映照和连续线性映照的乘积是紧的。

对于紧线性映照有类似于定理 4 的分解定理。

定理 8 设 X、Y 是 Banach 空间，则下述条件对于连续线性映照 $T: X \to Y$ 是等价的。

(a) T 是紧的；

(b) $T': Y'_c \to X'_\beta$ 是连续的；

(c) 在 Y' 中的每个有界集上，T' 是 $\sigma(Y', Y) - \beta(X', X)$ 连续的；

(d) $T': Y'_\beta \to X'_\beta$ 是紧的。

证 (a)$\Longrightarrow$(b)：由于 T 是紧的，T 映照 X 中的每个有界集为 Y 中的相对紧集，根据 §1 中的定理 4，T' 是 (Y', T_C) 到 $(X', \beta(X', X))$ 的连续映照，其中 T_c 表示 Y' 上在完全有界集上一致收敛拓扑。

(b)$\Longrightarrow$(c)：因 Y 是桶式空间，Y' 中的每个有界集 B' 是等度连续的，根据第三章 §6 中的定理 6 可知，在每个有界集 B' 上 $\sigma(Y', Y)$ 拓扑和完全有界集上一致收敛拓扑是一致的，故得(c)。

(c)$\Longrightarrow$(d)：因 Y' 中的单位球 B' 是 σ^* 紧的。由 (c) 知：$T'(B')$ 是强紧的，即是 $\beta(X', X)$ 拓扑紧集。

(d)$\Rightarrow$(a)：对 T' 应用 (a)$\Rightarrow$(d)，推得 $T'': X'' \to Y''$ 是紧的，由 $T = T''|_X$，Y'' 中的强拓扑在 Y 上限制和 Y 上的原拓扑一致，所以 T 是紧的。

推论 1 设 X、Y 是 Banach 空间，$T: X \to Y$ 是紧线性映照，则

(a) 如果 X 中的序列 x_n 弱收敛到 $x \in X$，则 $Tx_n \to Tx$；

(b) 如果 Y' 中的序列 y'_n 按 σ^* 拓扑收敛到 $y' \in Y'$，则 $T'y'_n$ 按强拓扑收敛到 $T'y'$。

证 (b) 由于 $\{y'_n\} \cup \{y'\}$ 是 Y' 中的有界集，根据定理 8 的 (c) 即得。

(a) 把 X 嵌入 X''，则 x_n 弱* 收敛到 x，对 T' 应用本推论 (b) 即得。

下述推论表明推论 1 中(b)在一定条件下是充分的。

推论 2　设 X 是 Banach 空间，Y 是可分 Banach 空间，则 $T\in\mathscr{L}(X,Y)$ 是紧的充要条件为推论 1 中的条件(b)满足。

证　设 D 是 Y 中的可数稠密集，则 D 是 Y 中全的子集，由于在 Y' 中的每个有界集 B' 上的 $\sigma(Y',Y)$ 和 $\sigma(Y',D)$ 相一致，所以在 B' 上 σ^* 拓扑可距离化，由定理 8 的(c)知：T 是紧的。证毕。

类似于定理 7，有：

定理 9　设 X、Y 是 Banach 空间，则 $c_0(X,Y)$ 是 $\mathscr{L}_\beta(X,Y)$ 的闭子空间。

四、核映照

设 E 是一个线性空间，V 是 E 中的均衡吸收集，$p(x)$ 是 V 的 Minkowski 泛函。则由拟范数 $p(x)$ 决定 E 上一个局部凸拓扑 $\mathscr{T}_V$，作商空间 $(E,\mathscr{T}_V)/p^{-1}(0)$，这个商空间关于范数

$$\|\hat{x}\|_V=p(x),\ x\in\hat{x}$$

是一个赋范空间，其中 $\hat{x}$ 表示包含 x 的等价类。赋范空间 $(E/p^{-1}(0),\|\cdot\|_V)$ 记为 E_V，$\widetilde{E}_V$ 是 E_V 的完备化，是一个 Banach 空间。

如果 E 是局部凸空间，V 是 E 中 0 的均衡凸环境，则商拓扑空间 $E/p^{-1}(0)$ 的拓扑强于(一般说来，严格强于) E_V 上的拓扑。所以商映照是 E 到 $\widetilde{E}_V$ 的连续线性映照。这个映照用 Φ_V 表示。

如果 U、V 是 E 的均衡凸吸收子集，且 $U\subset V$。设 p、q 分别表示 U 和 V 的 Minkowski 泛函，则 $p^{-1}(0)\subset q^{-1}(0)$。由此，每一个关于模 $p^{-1}(0)$ 的等价类 $\hat{x}$ 唯一地被包含在关于模 $q^{-1}(0)$ 的等价类 $\hat{y}$ 中。线性映照 $\Phi_{V,U}$：$\hat{x}\mapsto\hat{y}$ 称为 E_U 到 E_V 上的典型映照。因为 $\Phi_{V,U}$ 是连续的(事实上，范数 $\leqslant 1$)，能唯一地连续延拓为 $\widetilde{E}_U$ 到 $\widetilde{E}_V$ 中的线性映照，仍记为 $\Phi_{V,U}$，称为 $\widetilde{E}_U$ 到 $\widetilde{E}_V$ 的典型映照。

对偶地，设 E 是局部凸空间，$B\neq\emptyset$ 是 E 中的均衡凸有界子集，$E_1=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}nB$ 是 E 的子空间。在 E_1 中，B 是吸收的，故可定义集 B 的 Minkowski 泛函 p_B，则 (E_1,p_B) 是一个赋范空间，简记为 E_B。嵌入映照 ψ_B：$E_B\to E$ 称为 E_B 到 E 的典型嵌入映照。由于 B 是 E

中的有界子集，易知 ψ_B 是连续的。又如 B 是 E 中的自完备集，则 E_B 是 Banach 空间。我们还可看到如果 $V=B$ 是 E 中的均衡凸集，又是有界和吸收的，则如上述，既可定义 E_V，又可定义 E_B，不难知道此时 $E_V=E_B$ 是一致的。

如果 B、C 均是 E 中的均衡凸有界子集，$\emptyset\neq B\subset C$，则$E_B\subset E_C$，典型嵌入映照 $\psi_{C,B}: E_B\to E_C$ 是连续的。

如果 U、V、B、C 如前所述，Φ_U, Φ_V, ψ_B, ψ_C 分别是 $E\to\tilde{E}_U$, $E\to\tilde{E}_V$, $E_B\to E$ 及 $E_C\to E$ 的典型映照，则满足关系：$\Phi_V=\Phi_{VU}\Phi_U$, $\psi_C=\psi_{CB}\psi_B$。

上述两种构造辅助赋范空间的方法，对于下面的讨论是非常有用的。我们以前也曾应用过。

设 E、F 是局部凸空间，E' 是 E 的共轭空间。对于每个 $v\in E'\otimes F$，如下定义线性映照 $u\in\mathscr{L}(E, F)$：

$$x\mapsto u(x)=\sum_{i=1}^{r} f_i(x)y_i,\ x\in E,$$

其中 $v=\sum\limits_{i=1}^{r} f_i\otimes y_i$ 是 v 的一个表示。显然，$u(x)$与 v 的不同表示选取无关，定义是相容的。则对应 $v\mapsto u$ 是 $E'\otimes F$ 到 $\mathscr{L}(E, F)$ 中的代数同构。其值域是 $\mathscr{L}(E, F)$ 中的有限秩连续线性映照全体。映照 $u\in\mathscr{L}(E, F)$是有限秩的充要条件为：u 的值域 $R(u)$ 是有限维空间，其空间的维数称为 u 的秩。对于上述映照 τ_1: $v\mapsto u$ 称为 $E'\otimes F$ 到 $\mathscr{L}(E, F)$中的典型映照。

(IV) 设 E、F 是 Banach 空间，E' 是 E 的共轭 Banach 空间(强对偶)，如果在 $E'\otimes F$ 上赋以投影拓扑 $\mathscr{T}_p$，在 $\mathscr{L}(E, F)$上赋以范数拓扑 $\mathscr{T}_\beta$，则上述典型映照 τ_1: $v\mapsto u$ 是连续的。

证 令 r 为 E' 和 F 中的相应范数的张量积，则在 $E'\otimes F$ 上的投影拓扑 $\mathscr{T}_p$ 由范数 r 给定。对 $v\in E'\otimes F$ 及 v 的任一表示 $v=\sum\limits_{i=1}^{r} f_i\otimes y_i$，有

$$\|u\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|u(x)\|\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant 1}\sum_{i=1}^{r}|f_i(x)|\,\|y_i\|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{r} \|f_i\| \|y_i\|.$$

所以 $\|u\| \leqslant r(v)$。证毕。

下面引入当 E、F 是 Banach 空间时的核映照概念。由(Ⅳ)知道 τ_1 是 $E' \otimes_p F$ 到 $\mathscr{L}_\beta(E, F)$ 中的连续线性映照。由于 $\mathscr{L}(E, F)$ 按照范数拓扑是完备的，则 τ_1 能连续延拓为 $E' \widetilde{\otimes}_p F$ 到 $\mathscr{L}_\beta(E, F)$ 的连续线性映照，记为 τ。则称 τ 的值域 $R(\tau) \subset \mathscr{L}(E, F)$ 中的映照 u 为核映照。即 $u \in \mathscr{L}(E, F)$ 是核映照的充要条件为：存在 $v \in E' \widetilde{\otimes}_p F$，使 $u = \tau(v)$。我们知道 τ_1 是一一映照，但是延拓后的 τ 就不一定是一一映照。所以对核映照 u，可能有不同的 v 与 u 对应。

局部凸空间中核映照的概念：

设 E、F 是局部凸空间，$u: E \to F$ 是有界线性映照。设 U 是 E 中 0 的均衡凸环境，$u(U) \subset B$，B 是 F 中的均衡凸有界集。则由定理 1，u 可分解为 $u = \psi_B \cdot u_0 \cdot \Phi_U$，其中 $u_0 \in \mathscr{L}(E_U, F_B)$ 是由 u 导出的。如果 F_B 是完备的，则 u_0 可连续延拓为 $\overline{u_0} \in \mathscr{L}(\widetilde{E}_U, F_B)$，并且

$$u = \psi_B \cdot \overline{u_0} \cdot \Phi_U.$$

局部凸空间 E 到局部凸空间 F 的线性映照 u 称为核映照，如果满足条件：存在一个均衡凸环境 $U \in \mathscr{N}(E)$，使 $u(U) \subset B$，这里 B 是 F 中的均衡凸有界集，且 F_B 是完备的，同时由 u 导出的映照 $\overline{u_0} \in \mathscr{L}(\widetilde{E}_U, F_B)$ 是 $\widetilde{E}_U$ 到 F_B 的核映照。

由定义可直接知道：每个有限秩连续线性映照是核映照。根据 §6 中的定理 4，可得到核映照的一个特征如下：

定理 10 线性映照 $u \in \mathscr{L}(E, F)$ 是核的充要条件为：有形式

$$x \mapsto u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(x) y_n, \tag{2}$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < +\infty$，$\{f_n\}$ 是 E' 中的等度连续序列，$\{y_n\} \subset B$，B 是 F 中的自完备的均衡凸闭有界集。

证 必要性：设 u 是核映照，$u = \psi_B \cdot \overline{u_0} \cdot \Phi_U$，其中 $\overline{u_0}$ 是 $\mathscr{L}(\widetilde{E}_U, F_B)$ 中的核映照。U 是 E 中 0 的一个均衡凸环境，B 是 F 中的均衡

凸有界集，F_B 是完备的。由 $\mathscr{L}(\widetilde{E}_U, F_B)$ 中核映照的定义，$\overline{u}_0$ 是 $(\widetilde{E}_U)'\widetilde{\otimes}_p F_B$ 中的某元 v 在映照 τ 下的像。根据§6中的定理4，$v\in(\widetilde{E}_U)'\widetilde{\otimes}_p F_B=(E_U)'\widetilde{\otimes}_p F_B$ 可表为一个绝对收敛序列的和：

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n h_n\otimes y_n,$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|<\infty$，$\{h_n\}$，$\{y_n\}$ 分别是 $(E_U)'$ 和 F_B 中收敛于0的序列。令 $f_n=h_n\cdot\Phi_U(n=1, 2, \cdots)$。因为 $\{h_n\}$ 是 $(E_U)'$ 中的有界序列，所以 $\{f_n\}$ 在 U 上一致有界，$\{f_n\}$ 是 E' 中的等度连续序列。由 $u=\psi_B\tau(v)\Phi_U$ 知 $u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(x)y_n$。

充分性：如果 $u\in\mathscr{L}(E, F)$ 有如(2)的表示，令

$$U=\{x\in E|\ |f_n(x)|\leqslant 1, n=1, 2, \cdots\},$$

U 是均衡凸集。由假定 $\{f_n\}$ 是等度连续的，所以 U 是 E 中0的均衡凸环境。仿照定理1的证明，定义 E_U 上的连续线性泛函 $h_n(n\in N)$，使得 $f_n=h_n\cdot\Phi_U$，且 $\|h_n\|\leqslant 1$。把 h_n 连续延拓到 $\widetilde{E}_U$ 上，仍记为 h_n。这样，对于 u 相应的 $\overline{u}_0$ 为

$$\overline{u}_0:\quad \hat{x}\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n h_n(\hat{x})y_n,\ \hat{x}\in\widetilde{E}_U.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|\|h_n\|\|y_n\|<+\infty$，由§6中的性质(I)和定理2知道 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n h_n\otimes y_n$ 是 $(E_U)'\widetilde{\otimes}_p F_B$ 中的绝对收敛序列，因而收敛。记 $v=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n h_n\otimes y_n\in(E_U)'\widetilde{\otimes}_p F_B$，由 τ 的连续性知 $\overline{u}_0=\tau(v)$，所以 u 是核映照。证毕。

注 在定理10的条件中，可不妨认为 $\lambda_n>0(n=1, 2, \cdots)$。由于 $\{f_n\}$ 是等度连续集合，对每个 $x\in E$，$\{f_n(x)\}$ 是有界序列。又因 $\{y_n\}\subset B$，所以(2)式右边的级数可看作按 F_B 中的范数绝对收敛。

又因对每个绝对收敛序列 $\{\lambda_n\}$，可以写为 $\lambda_n=\varepsilon_n\lambda_n'\varepsilon_n'(n\in N)$，其中 $\varepsilon_n\to 0$，$\varepsilon_n'\to 0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n'|<\infty$，所以在(2)式中可以不妨假定

f_n 在 E 中 0 的某环境 U 上一致收敛于 0，且 $\{y_n\}$ 在 Banach 空间 F_B 中收敛于 0。这样 $\{y_n\}$ 的均衡凸闭包是 F_B 中的紧集，因而也是 F 中的紧集。所以在 (2) 式中还可以假定 B 是 F 中的均衡凸紧集。

有时为了方便，把(2)式写为 $u=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n\otimes y_n$。但这仅是式(2)的形式记法，并不意味着 u 是拓扑张量积中的元。

推论 1 核映照是紧的。

证 设 $u=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n\otimes y_n$，其中 $\{y_n\}$ 是 F_B 中的 0 序列，且 $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|\leqslant 1$，$\{f_n\}$ 是等度连续集合。令

$$U=\{x\in E\,\big|\,|f_n(x)|\leqslant 1,\ n=1,\ 2,\ \cdots\},$$

U 是 E 中 0 的环境，由此 $u(U)$ 包含在 $\{y_n\}\subset F_B$ 的均衡凸闭包 C 中。由 F_B 是完备的，C 是 F_B 中的紧集。因为 B 是 F 中的均衡凸闭有界集，嵌入映照 $\psi_B: F_B\to F$ 是连续的，所以 C 是 F 中的紧集，这样 u 把 $U\in\mathcal{N}(E)$ 映为 F 中的相对紧集。证毕。

推论 2 设 E, F, G, H 是局部凸空间，$u\in\mathscr{L}(E,F)$，$w\in\mathscr{L}(G,H)$，v 是 $F\to G$ 的核映照，则 $v\cdot u$ 和 $w\cdot v$ 都是核映照。

证 由定理 10，$v\cdot u$ 为核映照是明显的。下面证 $w\cdot v$ 是核的。由推论 1，存在 F 中 0 的均衡凸环境 V，使 $\overline{v(V)}$ 是 G 中的紧集，则 $B_1=w(B)$ 是 H 中的紧集，H_{B_1} 是完备的，由此知 $w\cdot v$ 是核映照。证毕。

推论 3 设 $u\in\mathscr{L}(E,F)$ 是核映照，则 u 可唯一地延拓为 $\bar{u}\in\mathscr{L}(\tilde{E},F)$，其中 $\tilde{E}$ 是 E 的完备化，并且 $\bar{u}$ 是核的。

证 由推论 1，u 是紧映照，设 $U\in\mathcal{N}(E)$，$u(U)\subset C$，这里 C 是 F 中的紧集。因 u 限制在 U 上一致连续，$u|_U$ 能唯一地连续延拓到 $[U]_{\tilde{E}}$ 上。因为 C 是紧集，所以延拓后仍取值于 C 中，立即可知道，这个延拓是某线性映照 $\bar{u}: \tilde{E}\to F$ 在 $[U]_{\tilde{E}}$ 上的限制。易知 $\bar{u}$ 是紧的，从而是连续映照，$\bar{u}$ 即为 u 的唯一延拓。由于 u 是核的，

有表达式 $u=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n\otimes y_n$ 知道 $\tilde{u}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \tilde{f}_n\otimes y_n$，其中 $\tilde{f}_n$ 是 f_n 在 $\tilde{E}$ 上的连续延拓，所以 $\tilde{u}$ 是核的。证毕。

注意到等度连续集合的并集是等度连续集合，以及均衡凸紧集 B_1 和 B_2 的和 B_1+B_2 仍是均衡凸紧集，根据定理 10 即得。

(V) 所有核线性映照 $T: E\to F$ 的集合，记为 $\mathscr{L}^1(E, F)$，是 $\mathscr{L}(E, F)$的线性子空间。

设 E_1、F_1 分别是局部凸空间 E、F 的闭子空间。$T: E\to F$ 是线性映照。$T_1=T|_{E_1}: E_1\to F_1$ 是 T 的限制。同时可以定义商映照 $\hat{T}: E/E_1\to F/F_1$。可以证明对于有界、弱紧和紧的线性映照 T，其相应的限制 T_1 和商映照 $\hat{T}$ 仍分别是有界、弱紧和紧的。但对于核映照的情形，T_1 和 $\hat{T}$ 都不一定是核的。而如果 E_1、F_1 有拓扑补子空间，特别是当 E、F 是 Hilbert 空间时，则核线性映照 T 的限制 T_1 和商 $\hat{T}$ 仍是核的，这可由定理 10 证得。

类似于定理 1 可有下述结论：

定理 11 设 E、F 是局部凸空间，线性映照 $T: E\to F$ 是核映照的充要条件为：存在 Banach 空间 N_1 和 N_2，$T_1\in\mathscr{L}(E, N_1)$，$T_2\in\mathscr{L}(N_2, F)$，以及核映照 $\tilde{T}: N_1\to N_2$，使得 $T=T_2\cdot\tilde{T}\cdot T_1$。并且 T_2 和 T_1 可以选择为紧线性映照。

$$
\begin{array}{ccccc}
E & & \xrightarrow{\quad T \quad} & & F\\
 & \searrow & \tilde{T} & \nearrow & \\
 & T_1 & N_1\to N_2 & T_2 &
\end{array}
$$

证 只要证最后一点：设核映照 $T=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n\otimes y_n$。使用定理 10 证明中所用的记号，$T=\psi_B\tilde{T}_0\Phi_U$，由于 T 的表示式中可假定 B 是紧集，f_n 在 $(E_U)'$ 中收敛于 0，即知 ψ_B 是紧映照。令 M 是 $\{f_n\}$ 的均衡凸 σ^* 闭包，则 M 是 $(E_U)'$ 中的紧集。事实上，M 是 $(E_U)'$ 中的闭集，同时由于 f_n 在 $(E_U)'$ 中收敛于 0，对每个 $\varepsilon>0$，M 包含在 $(E_U)'$ 中的 ε 球及有限维均衡凸紧集的和中，所以 M 能被有限个 2ε 球所覆盖，所以 M 是紧的。

令 $V=[M]_E^0$，则 V 是 E 中 0 的环境，且吸收 U，考虑典型映照

Φ_{VU}: $\widetilde{E}_U \to \widetilde{E}_V$, 由于其对偶 $\Phi'_{VU}: (E_V)' = E'_M \to (E_U)'$ 是紧的，所以 Φ_{VU} 是紧的，可以选择 V 代替 U，则典型映照 $\Phi_V: E \to \widetilde{E}_V$ 是紧的。证毕。

在 Banach 空间的情形，由定理 10 即得：

定理 12 设 E、F 是 Banach 空间，$A \in \mathscr{L}(E, F)$ 是核的充要条件为有表示

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(x) y_n, \ x \in E, \tag{3}$$

其中 $f_n \in E'$, $\|f_n\| \leqslant 1$, $y_n \in F$, $\|y_n\| \leqslant 1$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$,

或
$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_n(x) \bar{y}_n, \tag{4}$$

其中 $\bar{f}_n \in E'$, $\bar{y}_n \in F$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|\bar{f}_n\| \|\bar{y}_n\| < \infty$。

由定理 11，对于每个核映照 A 可如下定义核范数 $\|A\|_1$：

$$\|A\|_1 = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \|\bar{f}_n\| \|\bar{y}_n\|,$$

其中对 A 的所有如(4)式的表示取下确界。

由核范数的定义有：

(Ⅵ) 设 E, E_1, F, F_1 均是 Banach 空间，T、$S \in \mathscr{L}^1(E, F)$, $A \in \mathscr{L}(E_1, E)$ 及 $B \in \mathscr{L}(F, F_1)$, $\alpha \in C$, 其中 $\mathscr{L}^1(E, F)$ 表示 $E \to F$ 的核映照全体，则

$$\|T+S\|_1 \leqslant \|T\|_1 + \|S\|_1;$$
$$\|\alpha T\|_1 = |\alpha| \|T\|_1;$$
$$\|T\| \leqslant \|T\|_1;$$
$$\|BTA\|_1 \leqslant \|B\| \|T\|_1 \|A\|.$$

由此，$\mathscr{L}^1(E, F)$ 关于范数 $\|T\|_1$ 是赋范线性空间。

定理 13 设 E、F 是 Banach 空间，则 $\mathscr{L}^1(E, F)$ 是有限秩映照关于核范数的完备化。

证 取 E 的强对偶 E', τ 是 $E' \tilde{\otimes}_p F$ 到 $\mathscr{L}_\beta(E, F)$ 的典型映照，r 是 $E' \tilde{\otimes}_p F$ 中的投影范数，它是 E'、F 中相应范数的张量积。

设 $z\in E'\tilde{\otimes}_pF$，我们选取 $z_n\in E'\otimes F$，使 $r(z-z_n)<\frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$ $(n\in N)$，则 $r(z_1)<r(z)+\frac{\varepsilon}{2}$，$r(t_n)<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$，其中 $t_n=z_{n+1}-z_n$。

由投影范数的定义可知，存在表示 $z_1=\sum_{i=1}^{l_1}\lambda_i(f_i\otimes y_i)$，其中 $\|f_i\|\leqslant 1$，$\|y_i\|\leqslant 1$，$\sum_{i=1}^{l_1}|\lambda_i|<r(z_1)+\frac{\varepsilon}{2}$，以及 $t_n=\sum_{l_n+1}^{l_{n+1}}\lambda_i(f_i\otimes y_i)$ $(n\in N)$，其中 $\|f_i\|\leqslant 1$，$\|y_i\|\leqslant 1$，$\sum_{l_n+1}^{l_{n+1}}|\lambda_i|<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$。则由 $z=z_1+t_1+t_2+\cdots$ 得到 z 有表示

$$z=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(f_n\otimes y_n),$$

其中 $f_n\in E'$，$\|f_n\|\leqslant 1$，$y_n\in F$，$\|y_n\|\leqslant 1$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|\leqslant r(z)+\varepsilon$。

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}r(\lambda_nf_n\otimes y_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|<\infty$，上述级数关于范数 r 是绝对收敛的。由 τ 的连续性知 $A=\tau(z)$ 有表示

$$Ax=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_nf_n(x)y_n.$$

所以 $\|A\|_1\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|\leqslant r(z)+\varepsilon$，由 ε 的任意性知 $\|A\|_1\leqslant r(z)$。

反过来，如 $A\in\mathscr{L}^1(E,F)$，则 A 有表示

$$Ax=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\bar{f}_n(x)\bar{y}_n.$$

$\|\bar{f}_n\|\leqslant 1$，$\|\bar{y}_n\|\leqslant 1$，$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|<\|A\|_1+\varepsilon$。令 $\bar{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\bar{f}_n\otimes\bar{y}_n\in E'\tilde{\otimes}_pF$，则 $A=\tau(\bar{z})$，$r(\bar{z})\leqslant\sum|\lambda_n|<\|A\|_1+\varepsilon$。所以 $r(\bar{z})\leqslant\|A\|_1$。这里应注意 τ 一般不是一对一的。令 $N=\{z|\tau(z)=0\}$，作商空间 $E'\tilde{\otimes}_pF/N$，记相应于 z 的等价类为 $\hat{z}$，定义 $\hat{r}(\hat{z})=\inf_{z\in\hat{z}}r(z)$，则由上述的讨论知：在映照 $\hat{\tau}:\hat{z}\mapsto A$ 下，$(\mathscr{L}^1(E,F),\|\cdot\|_1)$ 和 $(E'\tilde{\otimes}_pF)/N$ 范数同构。所以 $\mathscr{L}^1(E,F)$ 关于核范数是完备的。同时由定理 11 即知 $\mathscr{L}(E,F)$ 中的有限秩映照在 $\mathscr{L}^1(E,F)$ 中是稠密的。证毕。

推论　$(\mathscr{L}^1(E, F), \|\cdot\|_1)$ 和 $(E'\widetilde{\otimes}_p F)/N$ 范数同构。

定理 14　设 E、F 是 Banach 空间，如果 $A\in\mathscr{L}^1(E, F)$，则 A' 也是核映照，并且 $\|A'\|_1\leqslant\|A\|_1$。

另一方面，如果 F 是自反 Banach 空间，且 A' 是核映照，则 A 是核的，并且 $\|A'\|_1=\|A\|_1$。

证　设 $A\in\mathscr{L}^1(E, F)$，存在表示 $Ax=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)y_n$，使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|f_n\|\|y_n\|\leqslant\|A\|_1+\varepsilon$，对于每个 $\varphi\in F'$，有

$$\langle\varphi, Ax\rangle=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\varphi(y_n)=\langle\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(y_n)f_n, x\rangle,\quad x\in E,$$

所以 $A'\varphi=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle y_n, \varphi\rangle f_n$，并且$\sum\|y_n\|\|f_n\|\leqslant\|A\|_1+\varepsilon$，这表示$A'\in\mathscr{L}^1(F', E')$，且 $\|A'\|_1\leqslant\|A\|_1$。

再证后一结论：如 $A'\in\mathscr{L}^1(F', E')$，则由上述证明知：$A''\in\mathscr{L}^1(E'', F)$且 $A=A''J$，其中 J 是 E 到 E'' 的典型嵌入。由定理 10 的推论 2，A 是核映照，且由

$$\|A\|_1\leqslant\|A''\|_1\|J\|=\|A''\|_1\leqslant\|A'\|_1\leqslant\|A\|_1$$

知 $\|A\|_1=\|A'\|_1$。证毕。

推论　如果 $A=\tau\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\otimes y_n\right)$，其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\otimes y_n\in E'\widetilde{\otimes}_p F$，则必有 $A'=\tau\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n\otimes f_n\right)$，其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n\otimes f_n\in F\widetilde{\otimes}_p E'$。

此外，由定理 14 及定理 11 即知：局部凸空间之间的核映照 $A: E\to F$ 的对偶 $A': F'_\beta\to E'_\beta$ 是核映照。

最后，我们举一个 l_1 空间之间的核映照的例子：

设 E 是所有 $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ 按范数 $\|x\|=\sum|x_n|<\infty$的元组成的 Banach 空间；F 是所有 $y=\sum y_m f_m$ 按范数 $\|y\|=\sum|y_m|<\infty$的元组成的 Banach 空间。E 到F 的连续线性映照 A 可以由矩阵 $A=(a_{mn})$表示，其中

$$Ae_n=\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}f_m.$$

由A的连续性可知矩阵必须且只须满足如下条件：存在某数$M<\infty$，使$\sum_{m=1}^{\infty}|a_{mn}|\leqslant M$，对$n=1, 2, \cdots$均成立。

容易知道A是紧映照的充要条件是：

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{n}\sum_{i=m}^{\infty}|a_{in}|=0.$$

定理 15 设$A\in\mathscr{L}(E, F)$，$A=(a_{mn})$。则A是核映照的充要条件为$\sum_{m=1}^{\infty}\sup_{n}|a_{mn}|<\infty$，并且$\|A\|_1=\sum_{m=1}^{\infty}\sup_{n}|a_{mn}|$。

证 必要性：设A是核映照，则A有表示

$$Ax=\sum_{k=1}^{\infty}(u^{(k)}x)y^{(k)},$$

其中 $u^{(k)}\in E'$，$y^{(k)}\in F(k=1, 2, \cdots)$，$\sum_{k=1}^{\infty}\|u^{(k)}\|_{\infty}\|y^{(k)}\|_1\leqslant\|A\|_1+\varepsilon$。

我们用e'_i表示以下述的等式：$e'_ie_k=\delta_{ik}(i, k=1, 2, \cdots)$定义的$E'$中的元。类似地定义$f'_i\in F'$：$f'_if_k=\delta_{ik}$ $(i, k=1, 2, \cdots)$。设$u^{(k)}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{(k)}e'_n$，$y^{(k)}=\sum_{n=1}^{\infty}y_n^{(k)}f_n$。由于$A$对应矩阵$(a_{mn})$，得到

$$a_{mn}=f'_m(Ae_n)=\sum_{k=1}^{\infty}(u^{(k)}e_n)(f'_my^{(k)})=\sum_{k=1}^{\infty}u_n^{(k)}y_m^{(k)};$$

$$\sup_{n}|a_{mn}|=\sup_{n}\left|\sum_{k=1}^{\infty}u_n^{(k)}y_m^{(k)}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|u^{(k)}\|_{\infty}|y_m^{(k)}|;$$

$$\sum_{m}\sup_{n}|a_{mn}|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|u^{(k)}\|_{\infty}\|y^{(k)}\|_1\leqslant\|A\|_1+\varepsilon,$$

因ε可任意小，得到$\sum_{m}\sup_{n}|a_{mn}|\leqslant\|A\|_1$。

充分性：设$\sum_{m}\sup_{n}|a_{mn}|<\infty$，$A=(a_{mn})\in\mathscr{L}(E, F)$，令$a_m=\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}e'_n\in E'$，则

$$Ax=\sum_{m=1}^{\infty}(a_mx)f_m.$$

其中$a_mx=\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}x_n$，由$A$的这个表示，推得：

$$\|A\|_1 \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \|a_m\|_\infty \|f_m\|_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sup_n |a_{mn}| < \infty.$$

所以A是核映照，并且$\|A\|_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sup_n |a_{mn}|$。

§8 逼近性质 (Approximation property)

设E、F是局部凸空间。$\mathscr{L}(E, F)$ 中的有限秩映照全体组成的子空间记为$\mathscr{F}(E, F)$。如对每个$\dot{A} = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes y_i \in E' \otimes F$，定义

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) y_i, \quad x \in E,$$

则$\tau: \dot{A} \mapsto A$ 是 $E' \otimes F$ 到$\mathscr{F}(E, F)$ 上的代数同构。如果把A和$\dot{A}$在代数同构意义下看作同一个元，则 $\mathscr{F}(E, F)$ 和 $E' \otimes F$ 可看作一样。

定义 局部凸空间E称为具有逼近性质，如果恒等映照I: $E \to E$ 属于$\mathscr{F}(E, E)$在$\mathscr{L}_C(E, F)$中的闭包。

定理 1 设E是局部凸空间，E' 是其对偶，则E的下述性质是等价的：

(a) E 具有逼近性质；

(b) $E' \otimes E$ 在 $\mathscr{L}_C(E, E)$中是稠密的；

(c) 对任一局部凸空间F，$E' \otimes F$ 在 $\mathscr{L}_C(E, F)$ 中是稠密的；

(d) 对任一局部凸空间F，$F' \otimes E$ 在 $\mathscr{L}_C(F, E)$ 中是稠密的。

证 (a)⇒(b)：设$B \in \mathscr{L}(E, E)$，由(a)存在$A_\nu \in \tau(E' \otimes E)$，$A_\nu \xrightarrow{\mathscr{T}_C} I$，作$B \cdot A_\nu$，则每个$B \cdot A_\nu$是有限秩映照，所以只要证明$B \cdot A_\nu \xrightarrow{\mathscr{T}_C} B$。任取$\mathscr{L}_C(E, E)$中0的环境：

$$U(M, V) = \{T \in \mathscr{L}(E, E) \mid T(M) \subset V\},$$

其中$V \in \mathscr{N}(E)$，M是E中的完全有界集。由B是连续的，存在$W \in \mathscr{N}(E)$，使$B(W) \subset V$。则由于能找到ν_0当$\nu \geqslant \nu_0$时，

$(A_\nu - I)\cdot(M)\subset W$，所以

$$(BA_\nu - B)(M)\subset B(W)\subset V.$$

即 $\nu\geqslant\nu_0$ 时，$BA_\nu - B\in U(M, V)$。

$(b)\Rightarrow(c)$：设 $A\in\mathscr{L}_c(E, F)$，则 $B\mapsto A\cdot B$ 是 $\mathscr{L}_c(E, E)$ 到 $\mathscr{L}_c(E, F)$ 的连续映照。由于 $E'\otimes E$ 在 $\mathscr{L}_c(E, E)$ 中是稠密的，取 $B_\nu\in E'\otimes E$，$B_\nu\xrightarrow{\mathscr{T}_c} I$，则 $AB_\nu\in E'\otimes F$，并且 $AB_\nu\to A$。即得(c)。

$(b)\Rightarrow(d)$：类似地，如果 $A\in\mathscr{L}(F, E)$，则 $B\mapsto B\cdot A$ 是 $\mathscr{L}_c(E,E)$ 到 $\mathscr{L}_c(E,E)$ 的连续映照，这是因为 A 把完全有界集映为完全有界集。由 $E'\otimes E$ 在 $\mathscr{L}_c(E, E)$ 中稠密，取 $B_\nu\in E'\otimes E$，$B_\nu\xrightarrow{\mathscr{T}_c} I$，则 $B_\nu\cdot A\in F'\otimes E$，且 $B_\nu\cdot A\xrightarrow{\mathscr{T}_c} A$。

$(d)\Rightarrow(b)$、$(c)\Rightarrow(b)$ 及 $(b)\Rightarrow(a)$ 是显然的。证毕。

下述定理表明 Banach 空间 E 具有逼近性质相当于每个紧线性映照可以用有限秩线性映照一致逼近。

定理 2 Banach 空间 E 具有逼近性质的充要条件为：对任一 Banach 空间 F，每个紧线性映照 T：$F\to E$ 属于 $\mathscr{F}(F, E)$ 在 $\mathscr{L}_\beta(F, E)$ 中的闭包。

证 必要性：设 $T: F\to E$ 是紧的，V 是 F 中的单位球，则 $T(V)$ 是 E 中的完全有界集。由于 E 具有逼近性质，故存在有限秩映照 $A_n: E\to E$，使得

$$\|A_n x - x\|\leqslant\frac{1}{n},\ x\in T(V).$$

因而 $\|A_n Ty - Ty\|\leqslant\frac{1}{n}$, $y\in V$.

充分性：设 K 是 E 中的完全有界集，由第三章 §6 中的定理 11，K 包含在 0 序列 $\{x_n\}$ 的均衡凸闭包中。取 $\lambda_n\geqslant 1$，$\lambda_n\to\infty$，而且 $\lambda_n x_n\to 0$，令 L 是 $\{\lambda_n x_n\}$ 的均衡凸闭包，则 $L\supset K$，L 是 E 中均衡凸紧集。记 E_L 是由 L 张成的 Banach 空间，则 K 是 E_L 中的完全有界集。

设 $T: E_L\to E$ 是典型嵌入，T 是紧的，由假定，对任一 $\varepsilon>0$，存在 $B\in(E_L)'\otimes E$，使按 $\mathscr{L}_\beta(E_L, E)$ 中的范数 $\|B-T\|\leqslant\varepsilon$。另外，

因T是一对一的，其对偶T'：$E'\to(E_L)'$的值域σ^*是稠密的。由于$(E_L)'_{\sigma^*}$和$(E_L)'_C$有相同的对偶E_L，线性子空间$T'(E')$也在$(E_L)'_C$中稠密。这样，对于每个$f\in(E_L)'$，在E_L的每个完全有界集上能用$T'(E')$中的元一致逼近。设$B=\sum_{i=1}^{n}f_i\otimes x_i$，则能找到$A=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\otimes x_i\in E'\otimes E$，其中$\varphi_i\in E'$，使得

$$\|Bx-Ax\|\leqslant\varepsilon,\ x\in K.$$

则$\|Ax-x\|\leqslant 2\varepsilon$，$x\in K$。证毕。

定理 3　具有可数基的 Banach 空间有逼近性质。

证　设E是具有可数基的 Banach 空间，F是任一 Banach 空间，T：$F\to E$是紧线性算子，只要证明T可以用有限秩连续线性映照按算子范数一致逼近即可。

设$\{e_n\}$是E中的基，则每一个$y\in E$可唯一地表为

$$y=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(y)e_i,$$

其中$f_i\in E'$。令$A_ny=\sum_{i=1}^{n}f_i(y)e_i$，则由基的定义，对每个$y\in E$，有$\|(I-A_n)y\|\to0$。然后根据§4中的定理10可知$(I-A_n)\xrightarrow{\mathcal{T}_C}0$。即在每个完全有界集上一致收敛于0。令$V=\{x\in F\,|\,\|x\|\leqslant1\}$，因为$T$是紧的，$T(V)$是$E$中的相对紧集，所以也是完全有界集，因此

$$\|T-A_nT\|=\sup_{x\in V}\|(I-A_n)Tx\|=\sup_{y\in T(V)}\|(I-A_n)y\|\to0\,(n\to\infty).$$

而$A_n\cdot T$是有限秩连续线性映照。证毕。

定理 4　每个 Hilbert 空间H具有逼近性质。

证　下面证明恒等映照I在$\mathscr{L}_C(H,H)$中可以用有限秩映照逼近。设K是H中的完全有界集，$U=\{x\in H\,\big|\,\|x\|\leqslant\varepsilon\}$，则存在有限点集$\{x_1,\cdots,x_m\}$，使得$K\subset\bigcup_{i=1}^{m}(x_i+U)$。令$G$是由$\{x_1,\cdots,x_m\}$张成的线性子空间，它是$H$中的闭子空间。设$P$是$H$到$G$上的正交投影。设$x\in K$，则对某个$i$，$x\in x_i+U$，$x=x_i+y_i$，$y_i\in U$，$px=px_i+py_i=x_i+py_i$。因此

$$\|x-px\|=\|y_i-py_i\|\leqslant 2\varepsilon,\ x\in K.$$

由于p是有限秩的。即得证。

定理 5 设E是局部凸空间，$\tilde{E}$是E的完备化空间。如果$\tilde{E}$有逼近性质，则E也有逼近性质。

证 即要证明：对于E中的任一完全有界集K，连续拟范数p和$\varepsilon>0$，能找到$A\in E'\otimes E$，使得

$$p(Ax-x)\leqslant\varepsilon,\ x\in K.$$

把p延拓到$\tilde{E}$，记为$\tilde{p}$。由假设$\tilde{E}$有逼近性质，存在

$$\tilde{A}\in(\tilde{E})'\otimes\tilde{E}=E'\otimes\tilde{E},$$

使得

$$\tilde{p}(\tilde{A}x-x)\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\ x\in K.$$

设 $\tilde{A}=\sum_{i=1}^{n}f_i\otimes\tilde{x}_i$，其中 $f_i\in E'$，$\tilde{x}_i\in\tilde{E}$。必有常数c使

$$|f_i(x)|\leqslant c,\ x\in K,\ i=1,2,\cdots,n.$$

选取 $x_i\in E$，使 $\tilde{p}(x_i-\tilde{x}_i)\leqslant\frac{\varepsilon}{2nc}$。令 $A=\sum_{i=1}^{n}f_i\otimes x_i\in E'\otimes E$。则对于每一个$x\in K$，有

$$p(Ax-x)\leqslant\tilde{p}(Ax-\tilde{A}x)+\tilde{p}(\tilde{A}x-x)\leqslant\varepsilon.$$

证毕。

对于局部凸空间的逼近性质可归纳为Banach空间的情形。

定理 6 设E是局部凸空间，如果存在0的均衡凸环境基$\mathscr{V}$，对每个$V\in\mathscr{V}$，$\tilde{E}_V$有逼近性质，则E具有逼近性质。

证 设$p(x)$是相应于V的拟范数，$E_V=E/p^{-1}(0)$，记Φ_V是E到$\hat{E}_V$的典型映照，令$W=\frac{1}{4}[\Phi(V)]^{-}_{\tilde{E}_V}$，则

$$\Phi^{-1}(W)\subset\frac{1}{2}V+p^{-1}(0)\subset V.$$

由于$\tilde{E}_V$具有逼近性质，由定理1的(d)，$E'\otimes\tilde{E}_V$在$\mathscr{L}_C(E,\tilde{E}_V)$中是稠密的。因$E_V=\Phi(E)$在$\tilde{E}_V$中是稠密的，所以$E'\otimes E_V$也在$\mathscr{L}_C(E,\tilde{E}_V)$中为稠密。由$\Phi\in\mathscr{L}(E,\tilde{E}_V)$，对任给的完全有界集$K\subset E$，存在$w=\sum_{i=1}^{n}f_i\otimes\Phi(x_i)\in E'\otimes E_V$，其中$f_i\in E'$，$x_i\in E$。使

得

$$w(x)-\Phi(x)\in W,\ x\in K.$$

即 $\Phi\left(\sum_{i=1}^{n}f_i(x)x_i-x\right)\in W$。两边作用 Φ^{-1}，考虑到 $\Phi^{-1}(W)\subset V$，得

$$\sum_{i=1}^{n}f_i(x)x_i-x\in V,\ x\in K.$$

以上的讨论对任一 $V\in\mathscr{V}$ 均成立，所以 E 具有逼近性质，证毕。

由定理 4 得到：

推论 1 设 $\mathscr{V}$ 是局部凸空间 E 中 0 的均衡凸环境基。如果对于每个 $V\in\mathscr{V}$，$\tilde{E}_V$ 是 Hilbert 空间，则 E 具有逼近性质。特别是，任意个 Hilbert 空间的乘积空间具有逼近性质。

推论 2 如果存在一个局部凸空间不具有逼近性质，则必存在一个 Banach 空间不具有逼近性质。

定理 7 设 E 是 Banach 空间，E' 是 E 的强对偶，则 E' 具有逼近性质的充要条件为：对于任一 Banach 空间 F，每个紧线性映照 $T: E\to F$ 属于 $E'\otimes F$ 在 $\mathscr{L}_\beta(E,F)$ 中的闭包。

证 充分性：设 $T: F\to E'$ 是任一紧线性映照，对于其对偶 $T': E\to F'$ 应用定理的条件，对 $\varepsilon>0$，存在 $A\in E'\otimes F'$，使得

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1}|\langle (A-T')x,y\rangle|\leqslant\varepsilon,$$

则 $A'\in F'\otimes E'$ 使得 $\|A'-T\|\leqslant\varepsilon$。由定理 2，即知 E' 有逼近性质。

必要性：设 $T: E\to F$ 是紧线性映照，根据 §7 中的定理 8，$T': F'_0\to E'$ 是连续的。令 $V'=\{\varphi\in F' \mid \|\varphi\|\leqslant 1\}$，则 $T'(V')$ 是 E' 中的完全有界集。由于 E' 具有逼近性质，故存在有限秩连续线性映照 A，使得

$$\|Af-f\|_{E'}\leqslant\varepsilon,\ f\in T'(V'). \tag{1}$$

因为 $(F'_0)'=F$，$AT': F'_0\to E'$ 是有限秩的，$AT'\in F\otimes E'$，因此能找到 $y_i\in F$ 及 $f_i\in E'$，使得

$$AT'=\sum_{i=1}^{n}y_i\otimes f_i.$$

令$V=\{x\in E\,\big|\,\|x\|\leqslant 1\}$，由(1)式知

$$\sup_{x\in V,\varphi\in V'}\left|\sum_{i=1}^{n}\langle x, f_i\rangle\langle y_i, \varphi\rangle-\langle x, T'\varphi\rangle\right|\leqslant\varepsilon,$$

即知$\left\|\sum_{i=1}^{n}f_i\otimes y_i-T\right\|\leqslant\varepsilon$。证毕。

1973 年 P. Enflo 构造了一个可分自反 Banach 空间 E，而在 E 上存在紧线性映照不能用有限秩连续线性映照逼近。由于具有可数基的 Banach 空间必具有逼近性质，这样 P. Enflo 就举了一个可分的但是没有可数基的 Banach 空间，否定地解决了 Banach 空间的基底问题。

下面说明：如果 E 是 Banach 空间，具有逼近性质，对于核映照 $T\in\mathscr{L}^1(E, E)$可以定义迹 tr$T$。

设 E 是 Banach 空间，由 §6 中的定理 3：$(E'_\beta\tilde{\otimes}_p E)'$ 代数同构于 $\mathscr{B}(E'_\beta\times E)$。我们先定义 $E'_\beta\tilde{\otimes}_p E$上的迹。作 $E'_\beta\times E$ 上的典型双线性泛函

$$F(f, x)=\langle x, f\rangle.$$

容易知道 $F\in\mathscr{B}(E'_\beta\times E)$，所以 F 对应一个 $E'_\beta\tilde{\otimes}_p F$ 上的连续线性泛函，记为 tr。对每个 $z\in E'_\beta\tilde{\otimes}_p E$，称 tr$z$ 为 z 的迹。

按定义，$\operatorname{tr}(f\otimes x)=f(x)$。对于 $z\in E'_\beta\tilde{\otimes}_p E$，根据 §7 中的定理 13 的证明，$z$ 可以表示为

$$z=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n\otimes x_n,\ \|f_n\|\leqslant 1,\ \|x\|\leqslant 1,\ \sum|\lambda_n|\leqslant r(z)+\varepsilon, \tag{2}$$

其中 r 为 $E'_\beta\tilde{\otimes}_p E$ 中投影拓扑范数。并且上述级数关于范数 r 绝对收敛。则由 tr 关于投影拓扑 $\mathscr{T}_p$ 的连续性知

$$\operatorname{tr}z=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle x_n, f_n\rangle. \tag{3}$$

而且上式右端是绝对收敛的，$|\operatorname{tr}z|\leqslant r(z)$。

由于连续线性泛函延拓是唯一的，如上定义的迹 tr$z$ 不依赖于 z 的具体表示。我们回忆一下：映照 $\tau: E'_\beta\tilde{\otimes}_p E\to\mathscr{L}(E, E)$的值域，按定义是核映照 $\mathscr{L}^1(E, E)$全体。如 $T=\tau(z)$，$z\in E'_\beta\tilde{\otimes}_p E$，我们希望用 tr$T$＝tr$z$ 来定义核映照 T 的迹。但是由于 τ 不一定是

一一映照，就可能使得 $\mathrm{tr}T$ 的定义不唯一。不过，如果能保证 $\mathrm{tr}\,T$ 的值不依赖于 z 的选取，特别是，当 τ 是一一映照时，对每个核映照 $T\in\mathscr{L}^1(E, E)$ 的迹就可定义为

$$\mathrm{tr}T=\mathrm{tr}z,\ T=\tau(z).$$

如记 $\|T\|_1$ 为 T 的核范数，则由 §7 中的定理 13：$\mathrm{tr}T\leqslant\|T\|_1$。

定理 8 设 E 是局部凸空间，具有逼近性质，如果

$$Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle x, f_n\rangle y_n \tag{4}$$

是 $E\to E$ 的核映照，则

$$\mathrm{tr}T=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle y_n, f_n\rangle \tag{5}$$

不依赖于 T 的具体表示。

证 首先设 $S=\varphi\otimes x\in E'\otimes E$，则 $ST=T'\varphi\otimes x\in E'\otimes E$，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(ST)=\langle x, T'\varphi\rangle=\langle Tx, \varphi\rangle&=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle x, f_n\rangle\langle y_n, \varphi\rangle\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle Sy_n, f_n\rangle\end{aligned} \tag{6}$$

与 T 的表示无关。由线性知：对于 $S\in E'\otimes E$，(5) 式不依赖于 T 的具体表示。由假定，E 具有逼近性质，存在 $E'\otimes E$ 中定向列 S_ν 按 $\mathscr{L}_C(E, E)$ 中的拓扑 $\mathscr{T}_C$ 收敛到 I。不失一般性，可以假设 $\{f_n\}$ 属于 V^0，其中 V 是 E 上的连续拟范数的单位球，$V=\{x\,|\,p(x)\leqslant1\}$ 以及 $\{y_n\}$ 属于紧集 K。则对于任给的 $\varepsilon>0$，能找到 ν_0，使当 $\nu\geqslant\nu_0$ 时，

$$p(y-S_\nu y)\leqslant\varepsilon,\ y\in K.$$

因此有

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle y_n, f_n\rangle-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle S_\nu y_n, f_n\rangle\right|\leqslant\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|.$$

这就证明了 $\mathrm{tr}(T)$ 不依赖于 T 的表示(4)。证毕。

推论 设 E 是 Banach 空间，具有逼近性质。则对于任一核映照 $T\in\mathscr{L}^1(E, E)$，可唯一地定义迹。

实际上，还可以证明对于 Banach 空间 E，$\tau: E'_\beta\tilde{\otimes}_p E\to\mathscr{L}^1(E, E)$ 是一一映照的充要条件为 E 具有逼近性质。

§9 核 空 间

核空间在分析中有着广泛的应用。

定义 设E是局部凸空间，如果存在0的均衡凸环境基$\mathscr{V}$，对每一个$V\in\mathscr{V}$，典型映照Φ_V: $E\to\tilde{E}_V$是核映照，则称E为核空间。

根据§7中的定理10可知道E是核空间的充要条件为$\tilde{E}$是核空间。

设K是数直线，K^d是其乘积空间，其中d有任意一个势，则K^d是核空间。事实上，对于K^d中0的均衡凸环境V，$E_V=\tilde{E}_V$是有限维的，由$E=K^d$到$\tilde{E}_V$的典型映照Φ_V是有限秩的连续线性映照，必是核映照，所以K^d是核空间。类似地，如E是局部凸空间，E'是E的共轭空间，则$(E, \sigma(E, E'))$是核空间。

但是我们必须指出，如果Banach空间E是核空间，则E一定是有限维的。事实上，取V为0的任一有界均衡凸环境，则$E_V=E$，由假定$E\to E_V$即$E\to E$的恒等映照是核的，所以E中的闭单位球是紧的。根据第一章§10中的内容即知E是有限维的。

一、核空间的基本性质

定理1 设E是局部凸空间，则下述结论是等价的：

(a) E是核空间；

(b) 从E到任意Banach空间F的连续线性映照总是核映照；

(c) 对0的每一个均衡凸环境U，存在另一个$V\subset U$，使典型映照Φ_{UV}: $\tilde{E}_V\to\tilde{E}_U$是核映照。

证 (a)$\Rightarrow$(b)：设F是任一Banach空间，$T\in\mathscr{L}(E, F)$，则存在E中0的均衡凸环境V，使$T(V)$是F中的有界集，并且Φ_V: $E\to\tilde{E}_V$是核映照。由$\Phi_V(E)=E_V$，可以唯一决定$S\in\mathscr{L}(\tilde{E}_V, F)$，使$T=S\cdot\Phi_V$。由§7所述可知$T$是核映照。

(b)$\Rightarrow$(c)：设U是E中0的均衡凸环境。由(b)知典型映照

$\Phi_U: E\to\tilde{E}_U$ 是核映照。由 §7 中的定理 10，Φ_U 可以表示为

$$\Phi_U(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(x)y_n,\quad x\in E。\tag{1}$$

其中 $\lambda_n\geqslant 0$，$\sum\lambda_n=1$，$\|y_n\|_U=1$，$\{f_n\}$ 是 E' 中的等度连续集合。

取正数 $\alpha<1$，由于 $\{f_n\}$ 等度连续，则

$$V=\{x\in E\,\big|\,|f_n(x)|\leqslant\alpha,\ n=1,2,\cdots\}$$

是 E 中 0 的均衡凸环境，并且对每个 $x\in V$，有

$$\|\Phi_U(x)\|_U<1,\quad x\in V。$$

所以 $V\subset U$。对每个 $\hat{x}\in E_V$，定义

$$\hat{f}_n(\hat{x})=f_n(x),\quad x\in\hat{x}。$$

则 $\{\hat{f}_n\}$ 是 E_V 上的线性泛函的等度连续集合，由(1)得

$$\Phi_{UV}(\hat{x})=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\hat{f}_n(\hat{x})y_n,\quad\hat{x}\in E_V。\tag{2}$$

因此 $\Phi_{UV}:\tilde{E}_V\to\tilde{E}_U$ 是核映照。

(c)⇒(a)：对 E 中 0 的每个均衡凸环境 U，由假设，存在 0 的均衡凸环境 $V\subset U$，使 $\Phi_{UV}:\hat{E}_V\to\tilde{E}_U$ 是核映照。由于 $\Phi_U=\Phi_{UV}\Phi_V$，所以 $\Phi_U: E\to\tilde{E}_U$ 是核映照，即 E 是核空间。

推论 1　如 E 是核空间，则对 E 中 0 的任一均衡凸环境 V，$\Phi_V: E\to\tilde{E}_V$ 都是核映照。

推论 2　核空间 E 中的每个有界集是完全有界的。

证　设 $\mathscr{V}$ 是 E 中 0 的均衡凸环境所组成的环境基，则在映照 $x\mapsto\{\Phi_V(x)\,|\,V\in\mathscr{V}\}$ 下，E 同构于 $\prod\{\tilde{E}_V, V\in\mathscr{V}\}$ 的子空间。设 B 是 E 中的有界集，B 对应于 $\prod\Phi_V(B)$ 的子集。由于 E 是核空间，每个 Φ_V 是核映照，$\Phi_V(B)$ 是 E_V 中的完全有界集，所以 $\Pi\,\Phi_V(B)$ 也是完全有界集，即知 B 同构于一个完全有界集。证毕。

推论 3　有界完备的核空间是半 Montel 空间。

下述定理揭示了核空间的特别构造。

定理 2　设 E 是核空间。又设 U 是 E 中 0 的一个环境，$1\leqslant p\leqslant\infty$，则存在 0 的均衡凸环境 $V\subset U$，使得 $\tilde{E}_V$ 范数同构于 l^p 的子空间。

证 不妨假定U是0的均衡凸环境。由定理1的推论1，Φ_U: $E\to\tilde{E}_U$ 是核映照，因此有如式(1)的表示：

$$\Phi_U(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(x)y_n,\ x\in E.$$

对每个$x\in E$，令

$$v(x)=(\sqrt[p]{\lambda_1}\,f_1(x),\ \sqrt[p]{\lambda_2}\,f_2(x),\ \cdots)$$

则由于 $\{f_n\}$ 是等度连续集，$v(x)\in l_p$，并且$v\in\mathscr{L}(E,\ l_p)$。设$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$(如$p=1$时，$q=\infty$；$p=\infty$时，$q=1$)，应用 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}\|\Phi_U(x)\|_U&=\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(x)y_n\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n|f_n(x)|\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[q]{\lambda_n}\,|\sqrt[p]{\lambda_n}\,f_n(x)|\leqslant\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n|f_n(x)|^p\Big)^{1/p}\\&=\|v(x)\|_{l^p}.\end{aligned}\tag{3}$$

令$V=\{x|\,\|v(x)\|_{l^p}\leqslant 1\}$，很明显，$V$是$E$中0的均衡凸环境，并且$V\subset U$。事实上，如$x\in V$，则由(3)式$\|\phi_U(x)\|_U\leqslant 1$，于是$x\in U$。

对于$\hat{x}\in E_V$，按定义，有

$$\begin{aligned}\|\hat{x}\|_V&=\inf\{\mu>0\,|x\in\mu V\}=\inf\{\mu>0|\,\|v(x)\|_{l^p}\leqslant\mu\}\\&=\|v(x)\|_{l^p}.\end{aligned}$$

即知E_V范数同构于$v(E)$，由此，$\tilde{E}_V$范数同构于l_p的闭子空间。证毕。

我们应用定理2到$p=2$的情形，得到下述推论：

推论1 设E是核空间，则存在0的均衡凸环境基$\{V_\alpha,\ \alpha\in A\}$，使得对于每个$\alpha\in A$，$V_\alpha$对应的$\tilde{E}_{V_\alpha}$是 Hilbert 空间。由此$E$上的拓扑可以由一族 Hilbert 拟范数给定。

证 由定理2，$\tilde{E}_{V_\alpha}$是 Hilbert 空间，对于$\hat{x}$、$\hat{y}\in\tilde{E}_{V_\alpha}$，定义一个内积$(\hat{x},\ \hat{y})_\alpha$。令$(x,\ y)_\alpha=(\Phi_{V_\alpha}x,\ \Phi_{V_\alpha}y)_\alpha$，它是$E\times E$上的半正定双线性 Hermite 泛函。$\|x\|_\alpha=(x,\ x)_\alpha^{1/2}$是$E$上的 Hilbert 拟范数。余略。

由此我们能把核空间表示为 Hilbert 空间投影极限的稠密子

空间。而核空间的完备化空间拓扑同构于 Hilbert 空间的投影极限。

推论 2　每一个完备的核空间 E 拓扑同构于一族 Hilbert 空间 $\{H_\alpha, \alpha\in A\}$ 的投影极限，其中 A 的势等于 E 中 0 的环境基的势。特别是，如果 E 是局部凸 Frechet 空间，则 E 是核空间的充要条件为 E 是一列 Hilbert 空间 H_n 的投影极限，$E=\varprojlim u_{mn}H_n$。而当 $n>m$ 时，$u_{mn}: H_n\to H_m$ 是核映照。

证　只要证后一个结论：设 E 是核的 Frechet 空间，则存在 0 的均衡凸环境基 $\{V_n, n=1, 2, \cdots\}$。不妨假设

$$V_1\supset V_2\supset\cdots\supset V_n\supset V_{n+1}\supset\cdots,$$

且每个 $\widetilde{E}_{V_n}$ 是 Hilbert 空间。由定理 1，还可假定 $\Phi_{V_n, V_{n+1}}: \widetilde{E}_{V_{n+1}}\to \widetilde{E}_{V_n}$ 是核映照。如果令 $H_n=\widetilde{E}_{V_n}$, $u_{mn}=\Phi_{V_m, V_{n+1}}(n>m)$，则 $E=\varprojlim u_{mn}H_n$。

相反地，如果 E 能表示为这种形式。则可适当选取 0 的一组均衡凸环境基 $\mathscr{V}$，使对每个 $V\in\mathscr{V}$，$\Phi_V: E\to\widetilde{E}_V$ 对应于 E 在有限个 H_n 的乘积空间上的投影 p。例如 p 是到 $\prod_{k=1}^{m}H_k$ 的投影。记 p_n 为 E 到 H_n 的投影，则 $p=(p_1, \cdots, p_m)$；由此

$$p=(u_{1n}p_n, \cdots, u_{mn}p_n),$$

其中 $n>m$，即知 p 是核映照。证毕。

下面的定理是属于 Grothendieck 的。

定理 3　核空间的每个子空间及每个分离的商空间是核空间；任意个核空间的乘积空间是核空间；可数多个核空间的局部凸直接和是核空间。

证　(a) 设 $E=\bigoplus_{i=1}^{\infty}E_i$，其中 E_i 均是核空间。F 是任一 Banach 空间。对每个 $u\in\mathscr{L}(E, F)$，如能证明 u 是核映照。由定理 1 即知：E 是核空间。

令 u_i 为 u 在 E_i 上的限制，则 u_i 是连续的。由于 E_i 是核空间，所以 $u_i: E_i\to F$ 是核映照。设 u_i 有表示

$$u_i=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^{(i)}f_n^{(i)}\otimes y_{n,i}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots).$$

则可以假定 $\|y_{n,i}\|\leqslant 1(n,\ i=1,\ 2,\ \cdots)$，$\sum_{n=1}^{\infty}|\mu_n^{(i)}|\leqslant i^{-2}$ $(i=1,2,\cdots)$，$\{f_n^{(i)},\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$是 E_i 上的等度连续线性泛函。令

$$U_i=\{x_i\in E_i\,|\,|f_n^{(i)}(x_i)|\leqslant 1,\ n=1,\ 2,\ \cdots\},$$

则 U_i 是 E_i 中 0 的均衡凸环境。把 $f_n^{(i)}$ 延拓到整个 E 上，而在 E_i 的补子空间 $\bigoplus_{k\neq i}E_k$ 上为 0。经这样延拓后的线性泛函记为 $f_{n,i}$，则可证 $\{f_{n,i},\ n,\ i=1,\ 2,\ \cdots\}$ 是 E 上的等度连续集合。事实上，令 $U=\Gamma_i U_i$，则 U 是 E 中 0 的环境，当 $x\in E$ 时，有

$$|f_{n,i}(x)|\leqslant 1\quad(n,\ i=1,\ 2,\ \cdots).$$

而由 u 的线性，u 能表示为

$$u=\sum_{n,i=1}^{\infty}\mu_n^{(i)}f_{n,i}\otimes y_{n,i}.$$

所以 u 是核映照，从而 E 是核空间。

(b) 设 $\{E_\alpha,\ \alpha\in A\}$ 是一族核空间，$E=\prod_{\alpha\in A}E_\alpha$，设 $u\in\mathscr{L}(E,F)$，F 是任意给定的 Banach 空间，则存在 $V\in\mathscr{N}(E)$，使得 $u(V)$ 是 F 中的有界集。按乘积拓扑的定义，V 有形式

$$V=V_{\alpha_1}\times V_{\alpha_2}\times\cdots\times V_{\alpha_n}\times\prod_{\alpha\neq\alpha_i}E_\alpha.$$

则由 $u(V)$ 的有界性知：u 在子空间 $G=\prod_{\alpha\neq\alpha_i}E_\alpha$ 上为 0。又由于 $E=\prod_{i=1}^{n}E_{\alpha_i}\oplus G$，只要证明 u 在 $\prod_{i=1}^{n}E_{\alpha_i}$ 上的限制是核的。由(a)即知 u 是核映照。

(c) 设 E 是核空间，M 是 E 的子空间，对于 E 中 0 的均衡凸环境 U，$V=M\cap U\in\mathscr{N}(M)$。我们要证明：对于每一个 $V\in\mathscr{N}(M)$ 存在另一环境 $V_1\subset V$，使典型映照 $\tilde{M}_{V_1}\to\tilde{M}_V$ 是核映照。

根据定理 2，可以假定 $\tilde{E}_U$ 是 Hilbert 空间，由 E 是核空间，存在 0 的环境 $U_1\subset U$，使 Φ_{UU_1}: $\tilde{E}_{U_1}\to\tilde{E}_U$ 是核映照。令 $V_1=M\cap U_1$，则不难看到 $\tilde{M}_{V_1}$ 和 $\tilde{M}_V$ 分别是 $\tilde{E}_{U_1}$ 和 $\tilde{E}_U$ 的闭子空间。故典型映照 Φ_{VV_1} 是 Φ_{UU_1} 在 $\tilde{M}_{V_1}$ 上的限制。由于 Φ_{UU_1} 是核的，故有表示

$$\Phi_{UU_1}=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i f_i\otimes y_i,$$

其中 $\lambda_i>0,\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i<\infty$，$\{f_i\}$ 是 $(\tilde{E}_{U_1})'$ 中的等度连续集合，$\{y_i\}$ 是 $\tilde{E}_U$ 中的有界集。用 p 表示 $\tilde{E}_U$ 到 $\tilde{M}_V$ 上的正交投影。令 $w_i=py_i$，g_i 表示 f_i 在 $\tilde{M}_{V_1}$ 上的限制，则 $\{g_i\}$ 是等度连续的，$\{w_i\}$ 是 $\tilde{M}_V$ 上有界的，Φ_{VV_1} 可表示为 $\Phi_{VV_1}=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i g_i\otimes w_i$。因此 Φ_{VV_1} 是核映照，M 是核空间。

(d) 设 E 是核空间，M 是 E 的闭子空间，$F=E/M$。设 Φ 是 $E\to F$ 的典型映照。对 F 中 0 的均衡凸环境 V，我们要证明：存在另一 $V_1\subset V$，使 $\Phi_{VV_1}:\tilde{F}_{V_1}\to\tilde{F}_V$ 是核的，从而 F 是核空间。

可以假定 $V=\Phi(U)$，$\tilde{E}_U$ 是 Hilbert 空间。$U_1\subset U$，$\tilde{E}_{U_1}$ 也是 Hilbert 空间，且 $\Phi_{UU_1}:\ \tilde{E}_{U_1}\to\tilde{E}_U$ 是核映照。我们可以证明 $\tilde{F}_V$ 和 $\tilde{E}_U/L$ 同构，其中 L 是 $\Phi_U(M)$ 在 $\tilde{E}_U$ 中的闭包。类似地，设 $V_1=\Phi(U_1)$，则 $\tilde{F}_{V_1}\cong\tilde{E}_{U_1}/L_1$，其中 L_1 是 $\Phi_{U_1}(M)$ 在 $\tilde{E}_{U_1}$ 中的闭包。我们进一步注意到 Φ_{UU_1} 映照 L_1 到 L 中，在上述同构下，Φ_{VV_1} 正好就是由 Φ_{UU_1} 导出的 $\tilde{E}_{U1}/L_1$ 到 $\tilde{E}_U/L$ 中的映照。

因为 Φ_{UU_1} 是核的，它能表示为 $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i f_i\otimes y_i$ 形式。对 Hilbert 空间 $\tilde{E}_U$ 和 $\tilde{E}_{U_1}$ 作正交分解，$\tilde{E}_{U1}=L_1\oplus L_1^{\perp}$，$\tilde{E}_U=L\oplus L^{\perp}$，$f_i=f_i'+f_i''$，$y_i=y_i'+y_i''$，$(i\in N)$是对应的分解。因为 Φ_{UU_1} 映照 L_1 到 L 中，推得 $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i f_i'\otimes y_i$ 在 $\tilde{E}_{U_1}$ 上为 0，因此

$$\Phi_{UU_1}=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i f_i\otimes y_i'+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i f''\otimes y_i''.$$

如果用 g_i 表示由 f_i'' 决定的 $\tilde{E}_{U_1}/L_1$ 上的线性泛函，w_i 表示 y_i'' 关于模 L 的等价类，则由 Φ_{UU_1} 导出的 Φ_{VV_1} 有表示 $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i g_i\otimes w_i$。因此是核映照。证毕。

作为定理 3 的推论有：

定理 4　任意个核空间的投影极限是核空间；可数多个核空间的归纳极限是核空间。

定理 5 设 E、F 是核空间，则 E 和 F 的投影张量积 $E\otimes_p F$ 及其完备化 $E\tilde{\otimes}_p F$ 是核空间。

证 设 U、V 分别是 E、F 中 0 的均衡凸环境。记 $G=E\otimes_p F$，则 $W=\Gamma(U\otimes V)$ 是 G 中 0 的均衡凸环境。根据 §6 中的性质（I）知，G_W 恒等于赋范空间 $(E_U\otimes F_V, r)$，其中 r 是 E_U、F_V 中相应范数的张量积。因此，如果用 Φ_U、Φ_V、Φ_W 分别表示相应的典型映照，我们有 $\Phi_W=\Phi_U\otimes\Phi_V$。因为 E、F 是核空间，Φ_U、Φ_V 是核映照，则有表示 $\Phi_U=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i f_i\otimes\hat{x}_i$，$\Phi_V=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\mu_j g_j\otimes\hat{y}_j$，其中 $\{\lambda_i\}$、$\{\mu_j\}$ 等满足 §7 中的定理 10 中所要求的条件。对 $x\in E$、$y\in F$，按定义，有

$$\Phi_U\otimes\Phi_V(x\otimes y)=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i f_i\otimes\hat{x}_i\Big)\otimes\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j g_j\otimes\hat{y}_j\Big).$$

如果把它看作 $\tilde{G}_W=E_U\tilde{\otimes}_p F_V$ 中的元，上式可写为

$$\Phi_W(x\otimes y)=\sum_{ij=1}^{\infty}\lambda_i\mu_j f_i(x)g_j(y)(\hat{x}_i\otimes\hat{y}_j).$$

这样，Φ_W 就被表示为 $\sum\limits_{ij=1}^{\infty}\lambda_i\mu_j(f_i\otimes g_j)\otimes(\hat{x}_i\otimes\hat{y}_j)$。$\{\lambda_i\mu_j, i, z\in N\}$ 是可和的，$\sum|\lambda_i\mu_j|<\infty$。$\{f_i\otimes g_j\}$ 是 $E\otimes F$ 上的等度连续集合，事实上，它们在 $\Gamma(U_1\otimes V_1)$ 上一致有界，其中 U_1 和 V_1 分别是 E、F 中 0 的适当环境。此外，由于 $\|\hat{x}_i\otimes\hat{y}_j\|=\|\hat{x}_i\|\|\hat{y}_j\|$，$\{\hat{x}_i\otimes\hat{y}_j\}$ 在 $\tilde{G}_W$ 中是有界的。因此 Φ_W 是核映照。即知对于 $E\otimes_p F$ 中 0 的环境基中的每个 $W=\Gamma U\otimes V$，Φ_W 是核的，所以 $E\otimes_p F$ 是核空间，从而 $E\tilde{\otimes}_p F$ 也是核的。证毕。

二、核空间的例子

例 1 $K(a)(a>0)$是核的(F)空间。

下面只对一维情形证明，结论对多维情形仍然是对的。根据第二章 §2 中的例 7，$K(a)$上的拓扑可以由一列内积

$$(\varphi, \psi)_n=\sum_{\nu=0}^{n}\int_{-a}^{a}\varphi^{(\nu)}(t)\overline{\psi^{(\nu)}(t)}dt$$

给定而成为可列 Hilbert 空间。若记 $K(a)$ 关于 $\|x\|_n=\sqrt{(\varphi, \varphi)_n}$ 的完备化空间为 $K_n(a)$，则

$$K_1(a)\supset K_2(a)\supset\cdots\supset K_n(a)\supset\cdots,$$

$K(a)=\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n(a)$，$K(a)$ 是一列 Hilbert 空间的投影极限。为了证明 $K(a)$ 是核空间，只要证明对每个 n，$K_{n+1}(a)$ 到 $K_n(a)$ 的嵌入映照 T_n^{n+1} 是 Hilbert-Schmidt 算子即可。事实上，由此即知 $K_{n+2}(a)$ 到 $K_n(a)$ 的嵌入算子是核映照，由定理 2 的推论 2 即知，$K(a)$是核空间。

为方便起见，只讨论 $a=\pi$ 的情形：记 $K_n'(a)$ 为$[-\pi,\pi]$ 上具有 $n-1$ 阶全连续导函数，而且 n 阶导函数平方可积的函数全体，按内积 $(\cdot,\cdot)_n$ 所成的 Hilbert 空间，则 $K_n(a)$是 $K_n'(a)$ 的闭子空间。记 $K_n'(a)$ 到 $K_n(a)$ 的投影为 p_n。$K_{n+1}'(a)$ 到 $K_n'(a)$ 的嵌入映照为 A_n；$K_{n+1}(a)$到 $K_{n+1}'(a)$的嵌入映照为 C_{n+1}。则

$$T_n^{n+1}=p_nA_nC_{n+1}.$$

由于 C_{n+1}、p_n 都是线性有界算子，只要证明 A_n 是 Hilbert-Schmidt 算子即知 T_n^{n+1} 是 Hilbert-Schmidt 算子。

作 $K_{n+1}'(a)$中的标准正交基$\{e_m\}$：

$$e_m(t)=\frac{e^{imt}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sum\limits_{\nu=0}^{n+1}m^{2\nu}}}\quad(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

又作 $K_n'(a)$ 中的标准正交基$\{g_m\}$：

$$g_m(t)=\frac{e^{imt}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sum\limits_{\nu=0}^{n}m^{2\nu}}}\quad(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots),$$

对于每个 $\varphi\in K_n'(a)$，将它展开成 Fourier 级数就可知道

$$T_n^{n+1}\varphi=\sum_m\lambda_m(\varphi,\ e_m)_{n+1}g_m,\tag{4}$$

而

$$\lambda_m=\sqrt{\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n}m^{2\nu}}{\sum\limits_{\nu=0}^{n+1}m^{2\nu}}}.\tag{5}$$

事实上，(4)与(5)是由

$$\varphi(s)=\frac{1}{2\pi}\sum_m\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)e^{-imt}dte^{ims}$$

以及利用分部积分而得的公式

$$(\varphi, e_m)_{n+1}=\sqrt{\frac{\sum_{\nu=0}^{n+1} m^{2\nu}}{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)e^{-imt}dt$$

推出的。由 (5) 容易算出 $\Sigma\lambda_m^2<\infty$。因此 A_n 是 Hilbert-Schmidt 算子。

例 2 广义函数论中的基本空间 K 是 $\{K(n)\}$ 的严格归纳极限，根据定理 4 即知 K 空间是核的。

例 3 $K(M_p)$型空间。这些空间的定义如下：设

$$1\leqslant M_1(x)\leqslant\cdots\leqslant M_p(x)\leqslant\cdots$$

是在每点为单调增加的函数列。它们可以取有限值也可以取无限值（这些函数 $M_p(x)$ 总是在同样的一些点上取无限值），而且 $M_p(x)$在它取有限值的那些点上是连续的。作为定义，空间$K(M_p)$是由无限次可微的，并且使得一切函数

$$|M_p(x)\varphi^{(k)}(x)|,\ 1\leqslant p<\infty,\ 0\leqslant k\leqslant p$$

为有界的函数 $\varphi(x)$ 全体组成。空间 $K(M_p)$ 上的拓扑由一列范数

$$\|\varphi\|_p=\max_{0\leqslant k\leqslant p}\sup_x|M_p(x)\varphi^{(k)}(x)|\quad (p=1, 2, \cdots)$$

给出。如果对任何 n，必存在 $p>n$，使得商式

$$m_{np}(x)=\frac{M_n(x)}{M_p(x)}$$

当 $|x|\to\infty$ 时趋于 0，而且又是 x 的可积函数 [在 $M_n(x)=M_p(x)=\infty$ 的那些点令 $m_{np}(x)=0$]，则称空间 $K(M_p)$满足条件 (N)，在参考文献[8]中的第一章 §3.6 中证明了如下结论：

定理 如空间 $K(M_p)$适合条件 (N)，则它是核空间。

满足条件(N)的 $K(M_p)$ 型空间类是足够广泛的了。属于这种类型的空间，例如上面所述的 $K(a)$，对于 $K(a)$取 $M_p(x)$ 如下：当 $|x|\leqslant a$ 时，$M_p(x)=1$，而当 $|x|\geqslant a$ 时，$M_p(x)=\infty$。显然满足条件(N)。

空间$\mathscr{S}$也是适合条件 (N) 的 $K(M_p)$ 型空间，这时 $M_p(x)=(1+|x|^2)^p$。同基本空间K一样，基本空间 $\mathscr{S}$ 是广义函数论中常

用的空间，在讨论广义函数的Fourier变换时很有用。$\mathscr{S}$空间又称为无穷可微的急降函数空间。

现在再考察类似于空间$K(M_p)$的序列空间。设$\|m_{pq}\|$ $(1\leqslant p, q<\infty)$是由对每个q适合不等式

$$1\leqslant m_{1q}\leqslant m_{2q}\leqslant\cdots\leqslant m_{pq}\leqslant\cdots$$

的元素组成的阵。用$k(m_{pq})$表示如下的序列$x=(x_1, \cdots, x_q, \cdots)$全体所成的空间，对每个$p$，序列

$$(m_{p1}x_1, m_{p2}x_2, \cdots, m_{pq}x_q, \cdots)$$

是有界的。显然$k(m_{pq})$是线性空间，如果令

$$\|x\|_p=\sup_q|m_{pq}x_q| \quad (p=1, 2, \cdots),$$

则空间$k(m_{pq})$是赋可列范的。如果对任何n，能找到p，使级数$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{m_{nq}}{m_{pq}}$收敛，则称$k(m_{pq})$适合条件$(N)$。

类似地可以证明，适合条件(N)的空间$k(m_{pq})$是核的。特别取$m_{pq}=q^p$时，适合条件(N)，对应的空间$k(m_{pq})$称为急降序列空间s。由此，空间s是核的。

由空间s的核性推出，整函数全体所成的空间$\mathcal{Z}$，当它的范数取为

$$\|\varphi\|_n=\sup_{|z|=n}|\varphi(z)| \quad (n=1, 2, \cdots)$$

时是核空间。事实上，不难看出整函数$\varphi(z)$的泰勒级数的系数$\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$组成急降序列。反之，如果$a_1, \cdots, a_n, \cdots$是急降的数列，则

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

是整函数。此外，利用关于泰勒级数系数的著名柯西不等式，可以断言，对应

$$\varphi(z)\to\left\{\varphi(0), \cdots, \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}, \cdots\right\}$$

是空间$\mathcal{Z}$和s间的同构。因此，由空间s的核性推出空间$\mathcal{Z}$也是核空间。

三、核空间和张量积

设 E、F 是局部凸空间。对于每个各别连续双线性泛函 $\mathscr{V}\in\mathfrak{B}(E\times F)$，在对应 $v\to\tilde{v}\to\tilde{\tilde{v}}$ 下，

$$v(x, y)=\langle\tilde{v}x, y\rangle=\langle x, \tilde{\tilde{v}}y\rangle,\ x\in E;\ y\in F.$$

其中 $\tilde{v}\in\mathscr{L}(E, F'_\sigma)$；$\tilde{\tilde{v}}\in\mathscr{L}(F, E'_\sigma)$。由 $F=(F'_\sigma)'$ 知 $\tilde{\tilde{v}}=(\tilde{v})'$。并且由 §5 中所述知，在对应 $v\to\tilde{v}\to\tilde{\tilde{v}}$ 下（以后称这种对应是典型的）可得到代数同构：

$$\mathfrak{B}(E\times F)\cong\mathscr{L}(E, F'_\sigma)\cong\mathscr{L}(F, E'_\sigma).$$

我们经常把上述典型映照下对应的元素在同构意义下看作是一样的。由于 $\mathscr{L}(E'_\tau, F)=\mathscr{L}(E'_\sigma, F_\sigma)$，因而

$$\mathfrak{B}(E'_\sigma\times F'_\sigma)\cong\mathscr{L}(E'_\sigma, F_\sigma)=\mathscr{L}(E'_\tau, F)$$

如在 $\mathfrak{B}(E'_\sigma\times F'_\sigma)$ 中赋以双等度连续集上的收敛拓扑 $\mathscr{T}_e$，后所成的空间记为 $\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$。在 $\mathscr{L}(E'_\tau, F)$ 中取等度连续集上收敛拓扑 $\mathscr{T}_e$，则在典型映照下，$\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$ 和 $\mathscr{L}_e(E'_\tau, F)$是拓扑同构的。由 §4 中的定理 13 知，$\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)\cong\mathscr{L}_e(E'_\tau, F)$ 是完备的充要条件为 E 和 F 是完备的。

由于 $E\otimes F$ 可以看作 $E'\otimes F'$ 上的线性泛函。如果在 $E\otimes F$ 上取所有集 $S\times T$ 上的一致收敛拓扑，其中 S、T 分别是 E'、F' 中的任一等度连续集合，称为 $E\otimes F$ 上的双等度连续收敛拓扑，记为 $\mathscr{T}_e$。$E\otimes F$ 赋以拓扑 $\mathscr{T}_e$，记为 $E\otimes_e F$。这样在通常所规定的典型映照下，$E\otimes_e F$ 可以看作 $\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$ 的子空间。记 $E\tilde{\otimes}_e F$ 为 $E\otimes_e F$ 的完备化，则有

(I) 设 E、F 是完备的局部凸空间，则 $E\tilde{\otimes}_e F$ 等于 $E\otimes_e F$ 在 $\mathfrak{B}_e(E'_\sigma, F'_\sigma)$中的闭包。

以前我们已经证明了 $(E\tilde{\otimes}_p F)'=\mathscr{B}(E\times F)$；$(E\tilde{\otimes}_i F)'=\mathfrak{B}(E\times F)$，下面来确定 $E\tilde{\otimes}_e F$ 的对偶空间 $(E\tilde{\otimes}_e F)'$。如果 S、T 分别是 E'、F' 中的等度连续集合，则 $S\otimes T\subset\mathscr{B}(E\times F)$。很清楚，$S\times T$ 是等度连续双线性泛函集合，则由 §6 中的定理 3 的推论，$S\otimes T$ 也是$(E\otimes_p F)'$ 中的等度连续集合，所以即知 $E\otimes F$ 上的双等度连续收敛拓扑 $\mathscr{T}_e\subset\mathscr{T}_p$。由此必然有 $(E\otimes_e F)'\subset\mathscr{B}(E\times F)$。

设X是紧空间，$C(X)$表示X上的连续函数全体组成的线性空间，赋以范数 $\|f\|=\sup_{t\in X}|f(t)|$。每一个 $C(X)$ 上连续线性泛函 $f\mapsto\mu_0(f)$称为X上的一个 Radon 测度。对于每一个 μ_0，根据 Riesz 定理：存在唯一的按 Halmos 意义的正则 Borel 测度 μ（广义），使得 $\mu_0(f)=\int f d\mu$，$f\in C(X)$。在对应 $\mu_0\to\mu$ 下，$C(X)$ 的强对偶 $C(X)'$ 范数同构于X上的所有有限正则 Borel 测度全体按范数 $\|\mu\|$ 所构成的 Banach 空间 $\mu(X)$，其中 $\|\mu\|$ 表示 μ 的全变差。由此我们经常写为 $\mu_0(f)=\int f d\mu_0$。

在下面定理中，S、T 上取弱*拓扑。如果 S、T 分别是 E'_σ、F'_σ 中闭的等度连续集合，则由 Alaoglu 定理即知是弱*紧的。由此 $S\times T$ 按乘积拓扑是紧的。

定理 6 设 E、F 是局部凸空间，$(E\tilde{\otimes}_\varepsilon F)'$ 表示 $E\tilde{\otimes}_\varepsilon F$ 的对偶，则对每个 $v\in\mathscr{B}(E\times F)$ 是属于 $(E\tilde{\otimes}_\varepsilon F)'$ 的充要条件为：v 能表示为如下的积分形式

$$u\mapsto v(u)=\langle u,v\rangle=\int_{S\times T}u_0(x',y')d\mu(x',y'),\ u\in E\otimes F,$$

其中 S、T 分别是 E'_σ、F'_σ 中闭的等度连续集合，u_0 是 $E'\times F'$ 上的双线性泛函 u 在 $S\times T$ 上的限制。

如果 A 是$(E\tilde{\otimes}_\varepsilon F)'$ 中的等度连续集合，则对 $v\in A$ 的积分形式表示中能取定 $S\times T$，而相应的 μ 是 $\mu(S\times T)$中的一个有界集。

证 充分性：因为每个 $u\in E\otimes F$ 可以看作 $E'\times F'$ 上的双线性泛函。u 在 $S\times T$ 上的限制关于 $E'_\sigma\times F'_\sigma$ 在 $S\times T$ 上的导出拓扑是连续的。这对于 $u\in E\tilde{\otimes}_\varepsilon F$ 同样是对的，这是因为每个 $u\in E\tilde{\otimes}_\varepsilon F$ 是 $E\otimes F$ 中的元在每个 $S\times T$ 上一致收敛的极限，其中 S、T 分别是 E'_σ、F'_σ 中的等度连续集合。因而 $u_0\in C(S\times T)$。积分定义了 $E\tilde{\otimes}_\varepsilon F$ 上的线性泛函 $v(u)$。下面证明 $v\in(E\tilde{\otimes}_\varepsilon F)'$。考虑对偶 $\langle E\tilde{\otimes}_\varepsilon F,\ E'\otimes F'\rangle$，取 $E\tilde{\otimes}_\varepsilon F$ 中 0 的环境 $W=(\Gamma S\otimes T)^0$，则当 $u\in W$ 时，$|v(u)|\leqslant\|\mu\|$。因此，$v\in(E\tilde{\otimes}_\varepsilon F)'$。

必要性：只要证明对于每个等度连续集合 $A\subset(E\tilde{\otimes}_\varepsilon F)'$ 能有定理中所要求的积分形式的表示即可。如果 A 是等度连续

的，则存在 $E\tilde{\otimes}_\varepsilon F$ 中 0 的环境 $W=(\Gamma S\otimes T)^0$，其中 S、T 分别是 E'_σ、F'_σ 中紧的等度连续集合，使 $A\subset W^0$。考虑 $E\tilde{\otimes}_\varepsilon F$ 到 $C(S\times T)$ 的映照 $u\mapsto u_0$。对 $E\tilde{\otimes}_\varepsilon F$ 中 0 的环境 W 作 Minkowski 泛函 p_W，对 $u\in E\tilde{\otimes}_\varepsilon F$，有

$$p_W(u)=\inf\{\lambda>0\,|\,u\in\lambda W\}=\inf\{\lambda\,|\sup_{\tau\in E(S\times T)}|u(\tau)|\leqslant\lambda\}$$
$$=\sup_{\tau\in S\times T}|u_0(\tau)|.$$

故相应的 $(E\tilde{\otimes}_\varepsilon F)_W$ 到 $C(S\times T)$ 中的映照 ψ 是范数同构。由 §2 中的定理 6 的 (g)，对偶映照 $\psi':\mu(S\times T)\to[(E\tilde{\otimes}_\varepsilon F)']_{W^0}$ 是开同态。集 A 是 $[(E\otimes_\varepsilon F)']_{W^0}$ 中的等度连续集合。由 §2中的定理 2，它是 $\mu(S\times T)$ 中的等度连续集合在 ψ' 映照下的像，而 $\mu(S\times T)$ 中的等度连续集合是范数有界的。证毕。

记 $\mathscr{G}(E\times F)=(E\tilde{\otimes}_\varepsilon F)'$。$\mathscr{G}(E\times F)$ 中的元 u 称为 $E\times F$ 上的积分双线性泛函。相应于 u 的线性映照 $\tilde{u}\in\mathscr{L}(E,F'_\sigma)$ 和 $\tilde{\tilde{u}}\in\mathscr{L}(F,E'_\sigma)$ 称为积分线性映照，由上述定理知，积分线性映照 $\tilde{u}\in\mathscr{L}(E,F'_\sigma)$ 可表示为

$$\tilde{u}(x)=\int_{E\times T}\langle x,x'\rangle y'd\mu(x',y'),\ x\in E.$$

其中 S、T 分别是 E'_σ、F'_σ 中适当的弱*闭等度连续集合。右边的积分取 Гельфанд 意义下的弱*积分。

根据上述讨论，如果 $T:x\mapsto\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\langle x,x_i\rangle y'_i$ 是 E 到 F'_σ 的核映照，且 $\{y'_i\}$ 是 F' 中的等度连续集合，则 T 是积分线性映照。下面我们可看到，如果 E 是核空间，F 是任一局部凸空间，则 $\mathscr{G}(E\times F)=\mathscr{B}(E\times F)$。

定理 7 设 E 是核空间，F 是局部凸空间，则 $E\otimes_p F$ 到 $\mathfrak{B}(E'_\sigma\times F'_\sigma)$ 的典型嵌入是 $E\otimes_p F$ 到 $\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$ 的稠密子空间的拓扑同构映照。

证 很清楚，$E\otimes F$ 到 $\mathfrak{B}(E'_\sigma\times F'_\sigma)$ 的典型嵌入是代数同构映照。证明分两步：首先证明 $E\otimes F$ 在 $\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$ 中是稠密的。其次证明 $\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$ 在 $E\otimes F$ 上导出投影张量积拓扑 $\mathscr{T}_p$。

(a) 在拓扑同构意义下，把 $\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$ 和 $\mathscr{L}_e(E'_\tau, F)$ 看作一样。要证明 $E\otimes F$ 在 $\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$ 中是稠密的，只要证明 $E\otimes F$ 在 $\mathscr{L}_e(E'_\tau, F)$ 中是稠密的。即对于 $u\in\mathscr{L}(E'_\tau, F)$ 取 $\mathscr{L}_e(E'_\tau, F)$ 中 0 的任一环境，有

$$M(A, V)=\{T\,|\,T(A)\subset V\},$$

其中 A 是 E'_τ 中的均衡凸闭等度连续集合，$V\in\mathscr{N}(F)$。必存在 $u_0\in E\otimes F$，使得 $u-u_0\in M(A, V)$。

设 $U=A^0$，U 是 E 中 0 的环境。因 E 是核空间，取 $W\subset U$ 是 E 中 0 的均衡凸环境，使得 $\Phi_{U,W}: \tilde{E}_W\to\tilde{E}_U$ 是核的，则

$$\Phi_{UW}=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i y'_i\otimes z_i.$$

其中 $(\lambda_i)\in l^1$，$\{y'_i\}$、$\{z_i\}$ 分别是 $E'_B(B=W^0)$ 和 $\tilde{E}_U$ 中的有界序列。则由 §7 中的定理 14 的推论，E'_A 到 E'_B 的典型嵌入可表示为 $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i z_i\otimes y'_i$。因为 E_U 在 $\tilde{E}_U$ 中是稠密的，每个 z_i 看作 E'_A 上的线性泛函，可以用 E 中的元 x 在 A 上一致逼近。因此，对于给定的 $\varepsilon>0$，存在整数 n 和 $x_i\in E(i=1, \cdots, n)$，使得对于每一个 $x'\in A$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\langle x_i, x'\rangle y'_i-x'\in\varepsilon B.$$

选取 ε，使得 $\varepsilon u(B)\subset V$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\langle x_i, x'\rangle u(y'_i)-u(x')\in V,\ x'\in A.$$

因此 $u_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\otimes u(y'_i)\in E\otimes F$ 满足上述要求。$E\otimes F$ 在 $\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$ 中是稠密的。

(b) 由于 $(E\otimes_p F)'=\mathscr{B}(E\times F)$，考虑自然对偶 $\langle E\otimes_p F, \mathscr{B}(E\times F)\rangle$。同时，根据 (a) $(\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma))'=(E\otimes_e F)'=\mathscr{G}(E\times F)$，考虑自然对偶 $\langle\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma), \mathscr{G}(E\times F)\rangle$。所以为要证明 $\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$ 在 $E\otimes F$ 上的导出拓扑即为 $\mathscr{T}_p$，只要证明 $\mathscr{B}(E\times F)$ 和 $\mathscr{G}(E\times F)$ 有相同的等度连续集合。

设 Q 是 $\mathscr{B}(E\times F)$ 中的等度连续集合。把 $\mathscr{B}(E\times F)$ 看作

$\mathscr{L}(E, F'_\sigma)$ 的子空间。Q 的等度连续性等价于存在 E 中 0 的均衡凸环境 U 和等度连续集合 $B\subset F'$，使得对于每一个 $u\in Q$，有 $u(U)\subset B$。我们不妨可假定 B 是 F'_σ 中的均衡凸紧集。对 $u\in Q$，作典型分解 $u=\psi_B\cdot\tilde{u}\cdot\Phi_U$，其中 $\tilde{u}\in\mathscr{L}(\tilde{E}_U, F'_B)$，$\|\tilde{u}\|\leqslant 1$。因为 E 是核空间，$\Phi_U: E\to\tilde{E}_U$ 是核映照，故能表示为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i x'_i\otimes y_i$。这里我们可假定 $x'_i\in V^0$，$y_i\in\Phi_U(U)^-(i=1, 2, \cdots)$ 以及 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|=c<\infty$。由此推得

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x'_i\otimes\tilde{u}(y_i).$$

所以 u 是 $\mathscr{L}(E, F'_\sigma)$ 中的积分线性映照。根据定理 6，$u\in\mathscr{G}(E\times F)$。同时对每个 $u\in Q$，$\tilde{u}(y_i)\subset B\ (i\in N)$。由上式即知 $Q\subset c(\Gamma V^0\otimes B)^-$，其中闭包是关于 $\sigma(\mathscr{G}(E\times F), E\otimes F)$ 取的。因为 $\Gamma V^0\otimes B$ 是 $\mathscr{G}(E\times F)=(\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma))'$ 中的等度连续集合，根据 §4 中的性质 VI 和定理 8 即知 $(\Gamma V^0\otimes B)^-$，由此 Q 是 $\mathscr{G}(E\times F)$ 中等度连续集合。反之，易知 $\mathscr{G}(E\times F)$ 中的等度连续集合也是 $\mathscr{B}(E\times F)$ 中的等度连续集合。证毕。

推论 1　设 E 是完备的核空间，F 是完备的局部凸空间，则

$$E\tilde{\otimes}_e F\cong\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)\cong\mathscr{L}_e(E'_\tau, F).$$

证　因为 $\mathfrak{B}_e(E'_\sigma\times F'_\sigma)$ 是完备的。

推论 2　设 E 是核空间，F 是局部凸空间，则在恒等映照下 $E\tilde{\otimes}_p F$ 和 $E\tilde{\otimes}_e F$ 拓扑同构。

根据定理 7 证明的第二部分，即得下述关于核的一般定理：

定理 8　（抽象的关于核的定理）　设 E 是核空间，F 是局部凸空间，则每一个 $v\in\mathscr{B}(E\times F)$ 能表示为

$$v(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\langle x, x'_i\rangle\langle y, y'_i\rangle,$$

其中 $\{\lambda_i\}\in l^1$，$\{x'_i\}$、$\{y'_i\}$ 分别是 E'_σ、F'_σ 中的等度连续序列。

定理 9　每个核的 (F) 空间的强对偶是核空间。

证　设 E 是核的 (F) 空间。由定理 1 的推论 1，E 是 Montel

空间，从而E是自反空间，E的强对偶E'_β也是自反的。所以$\beta(E',E)=\tau(E',E)$，$E'_\beta=E'_\tau$。为要证明E'_β是核空间，由定理1只要证明对任给的Banach空间F，每个连续线性映照$u\in\mathscr{L}(E'_\tau,F)$是核映照。由于$\mathscr{L}(E'_\tau,F)\cong\mathfrak{B}(E'_\sigma,F'_\sigma)$，又因$E$、$F$是完备的，由定理7的推论1和2知：$\mathscr{L}(E'_\tau,F)\cong E\tilde{\otimes}_p F$。则由§6中的定理4，$u$可表示为

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i\otimes y_i,$$

其中$\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|<\infty$，$\{x_i\}$、$\{y_i\}$分别是$E$、$F$中的0序列。而$\{x_i\}$可看作$(E'_\tau)'=E$上的等度连续集合。由§7中的定理10，$u$是$E'_\tau$到$F$的核映照。即$E'_\beta$是核空间。证毕。

对于一般的核空间的强对偶可以不是核空间。例如，设K是数直线，K^d（d有任一势）是核空间，但是如d是不可数的，则其强对偶空间不是核的。事实上，我们可以证明对于任何核空间E，其强对偶E'_β上的等度连续集合关于$\sigma(E',E)$是可距离化的，从而是可分的。所以如$(K^d)'_\beta$是核空间，则可推得$(K^d)''=K^d$中的等度连续集合是可分的，但由于d是不可数的，这是不可能的。由此K^d的强对偶不是核空间。

定理10　设E是半自反空间，E的强对偶E'_β是核空间，F是任一核空间，则$\mathscr{L}_\beta(E,F)$是核空间。

证　因为E是半自反的，E中的每个有界集即是$(E'_\beta)'$中的等度连续子集，所以$\mathscr{L}_\beta(E,F)$可以看作$\mathfrak{B}_e(E_\sigma,F'_\sigma)$的子空间。由假定$E'_\beta$是核空间，根据定理7知$\mathfrak{B}_e(E_\sigma,F'_\sigma)$的完备化等于$E'_\beta\tilde{\otimes}_p F$。而$E'_\beta\tilde{\otimes}_p F$是两个核空间的投影张量积，根据定理5，是核空间，由此其子空间$\mathscr{L}_\beta(E,F)$也是核空间。证毕。

例4　因为$K(a)$是核的(F)空间，由定理9知其强对偶$K(a)'$是核空间。同样$\mathscr{S}$空间的强对偶$\mathscr{S}'$是核的。

例5　基本空间K的强对偶K'是核空间。这是由于K是$K(n)(n=1,2,\cdots)$的严格归纳极限，由此，K'可看作$\prod_{n=1}^{\infty}K'(n)$的

子空间，而 $\prod_{n=1}^{\infty} K'(n)$ 根据定理 3 是核空间，所以 K' 是核空间。

例 6 根据定理 10，$\mathscr{L}_\beta(K, K)$，$\mathscr{L}_\beta(K', K_1)$，$\mathscr{L}_\beta(\mathscr{S}, \mathscr{S})$ 均是核空间。

四、核空间的两个判别法

为了应用，需要建立判定空间核性的充要条件。下面仅叙述结论，具体证明可参看[6]。

设 E 是局部凸空间，E 中的集合 $\{x_\alpha, \alpha\in A\}$ 称为可和的是指：如果在 E 中极限 $\lim\limits_{H} x_H$ 存在。其中 $x_H=\sum\limits_{\alpha\in H} x_\alpha$，$H$ 遍取 A 的有限子集，且按包含 $\subset$ 定向，$\{H\}$ 是一个定向半序集族，如果极限为 $x\in E$，则可记作 $\sum\limits_{\alpha\in A} x_\alpha = x$。当 $A=N$ 时，即是可列情形，如果 $\{x_n\}$ 是可和的，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 也称为无条件收敛的。E 中可和集合 $\{x_\alpha, \alpha\in A\}$ 称为绝对可和的，是指如果对于 E 上的每个连续拟范数 $p(x)$，实数集合 $\{p(x_\alpha), \alpha\in A\}$ 是可和的。当 $\{x_n\}$ 是绝对可和的时，也称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 是绝对收敛的。

定理 11 (F) 空间 E 是核空间的充要条件为 E 中的每个可和序列是绝对可和的。

另外还可以用连续线性泛函的序列的收敛性来判定核性。

设 E 是可列 Hilbert 空间，其上的拓扑由一列相容范数 $\|x\|_n=\sqrt{(x, x)_n}$ 给定，其中 $(x, x)_n$ $(n\in N)$ 是 E 上的内积。

类似地，对于 E 上的连续线性泛函序列 $\{f_n\}$，可引进无条件和绝对收敛的概念。如果对于任一 $x\in E$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle f_n, x\rangle|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ 是无条件收敛的。如果存在 E 中 0 的一个环境 U，使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_U$ 收敛，其中 $\|f_n\|_U=\sup\limits_{x\in U}|\langle f_n, x\rangle|$，称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ 是绝对收敛的。我们可以证明下述定理，可参看[8]。

定理 12 可列 Hilbert 空间 E 是核的充要条件为 E 上的每一

个无条件收敛的连续线性泛函序列 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 是绝对收敛的。

习 题 四

1. 试证 l 是 c_0 的第一纲子空间.

2. 设X是线性拓扑空间，$i: X\to X$ 是恒等映照。试证明X是分离的充要条件为映照 i 有闭图象。

3. 设 T_1、T_2 是线性空间X上的两个分离的向量拓扑，$T_1 \gneq T_2$。试证明恒等映照 $i: (X, T_2)\to(X, T_1)$ 有闭图象但不是连续的。

4. 设X是$[0,1]$上的连续可微实值函数全体组成的线性空间，赋以范数 $\|f\|_\infty$，$Y=C[0,1]$，设 $Df=f'$。试证明 $D: X\to Y$ 有闭图象，但不是连续的。

5. 设X是线性拓扑空间，A和B是X中的互为代数补子空间，$A+B=X$，$A\cap B=\{0\}$。对每个 $x\in X$，可表为 $x=a+b$，其中 $a\in A$，$b\in B$。定义X到A的映照 $p: x\mapsto a$。试证明 A、B 是闭子空间的充要条件为p有闭图象。

6. 设X是 Frechet 空间. 试证明X的互为代数补的两个闭子空间必为拓扑补。

7. 设线性空间X关于两个拓扑T和 T' 都是 Frechet 空间。又设X上存在一个分离拓扑弱于T和 T'。试证明 $T=T'$。

8. 设 $C[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上的实连续函数全体所组成的线性空间，赋以范数 $\|x(t)\|=\sup\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|$，$\mathfrak{S}[0,1]$是 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 可测函数空间，赋以度量收敛拓扑。假设当 $t>1$ 时，令 $x(t)=x(1)$，则对 $n=1, 2, \cdots$定义 $C[0,1]$ 到 $\mathfrak{S}[0,1]$的线性算子

$$(T_n x)(t)=n\left(x\left(t+\frac{1}{n}\right)-x(t)\right),$$

则 a) 每个 T_n 是连续的，

b) $C[0,1]$ 中必存在函数 $x(t)$，使它在一个正 Lebesgue 测度集上不可微分(如果对每个 $x(t)\in C[0,1]$ 几乎处处可微，则 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)=x'(t)=T(x)$，对每个$x$存在，由 Banach-Steinhaus 定理将推知 $T(x)$ 连续)。